MODELO DE FRONTEIRA ESFÉRICA APERFEIÇOADO

Eric Cézzane Cólen Guedes e Armando Zeferino Milioni
Instituto Tecnológico da Aeronáutica - Praça Mal. Eduardo Gomes nº50 – São José dos Campos – SP

***Resumo* — O objetivo deste trabalho é apresentar um aperfeiçoamento do Modelo de Fronteira Esférica (MFE) publicado por Avellar, et al (2006, formalmente aceito e aguardando publicação no JORS - Journal of the Operational Research Society). Exemplos numéricos mostraram que o MFEap apresentou melhores resultados que o Modelo de Fronteira Esférica (MFE), tomando-se como referência os resultados de outros modelo de Alocação de Custos Fixos propostos na literatura. Além disso, o MFEap apresentou uma propriedade de coerência desejável que não é observada nem no MFE e nem nos demais modelos de Alocação de Custos Fixos da literatura que foram estudados. Após a definição dessa propriedade de coerência, apresenta-se um teorema demonstrando que, de fato, o MFEap pode assegurá-la.**

***Palavras-chaves* — DEA, Modelo de Fronteira Esférica, alocação de custo fixo.**

I. INTRODUÇÃO

A medida de eficiência é uma necessidade na análise de qualquer sistema ou processo. Devido à competitividade entre as entidades em análise ou a falta de recursos, a busca por processos mais eficientes tornar-se imperativa.

A eficiência é um conceito relativo, ou seja, quando se define a eficiência de uma unidade ou processo, esta foi obtida por comparação com uma unidade ou processo tido como 100% eficiente (referência). Diferente da produtividade, que é caracterizada como uma relação entre o que foi produzido e o que foi gasto [1].

A medida de eficiência pode ser obtida por métodos paramétricos, onde se estabelece uma função, por exemplo, através de uma regressão. Esses métodos definem a eficiência em relação à média. Outra forma de se calcular a eficiência seria por métodos não-paramétricos. Neste último, não se estabelece uma função de produção e a medida de eficiência é calculada tendo como referência a maior de todas as relações.

A eficiência de um processo realizado por entidades, onde se tem apenas uma entrada e uma saída, pode ser facilmente obtida. Basta calcular as relações entre as entradas e saídas de cada entidade, estabelecer a referência (pode ser a maior relação ou a relação de uma entidade virtual) e, por comparação, calcular a eficiência de cada entidade avaliada.

No entanto, quando se deseja avaliar a eficiência de um processo com múltiplos parâmetros de entrada e saída, surge a dificuldade de se estabelecer quais os parâmetros que devem compor a análise de eficiência e que pesos atribuir para cada parâmetro.

Os parâmetros (variáveis) que serão utilizados na análise de um processo serão escolhidos por um especialista, de maneira que essas variáveis possam ser manipuladas e sejam capazes de realmente explicar a eficiência do processo. No entanto, existe a dificuldade de se estabelecer os pesos que devem ser atribuídos a cada variável, o que normalmente é feito de forma subjetiva.

A Análise Envoltória de Dados (DEA – Data Envelopment Analysis) é uma ferramenta da estatística não-paramétrica que avalia a eficiência de unidades tomadoras de decisão (DMUs – Decision Making Units), comparando entidades que realizam tarefas similares e se diferenciam pela quantidade de recursos (inputs) e de bens (outputs) envolvidos. A metodologia DEA possibilita, ainda, estabelecer metas de eficiência (benchmarks) para as entidades consideradas aquém da fronteira de eficiência.

O conceito de fronteira de produção, que está relacionado com o processo físico no qual os inputs são combinados para gerar outputs, pode ser definido como sendo a máxima quantidade de outputs que podem ser produzidos a partir de uma quantidade fixa de inputs, ou ainda, a menor quantidade de inputs que é necessária ao processo para se determinar uma quantidade fixa de outputs.

DEA baseia-se em modelos de programação linear para determinar uma fronteira linear por partes, na qual o modelo encarrega-se de calcular os pesos dados a cada variável, que são necessários para determinar essa fronteira e utilizar simultaneamente múltiplos outputs e inputs em um índice de eficiência de cada unidade [2]. Os pesos são escolhidos pela ferramenta DEA de maneira a maximizar a eficiência de cada DMU, sendo que, em princípio, a formulação DEA permite total flexibilidade na escolha dos pesos (variáveis de decisão), de modo que cada DMU atinja a maior eficiência possível com base na combinação das quantidades respectivas de inputs e outputs [3].

Enquanto os modelos clássicos de DEA baseiam-se em liberdade total de ação, tanto na utilização de recursos como na produção de bens, há casos em que essa liberdade não existe.

II. MODELO DE FRONTEIRA ESFÉRICA[4]

A fronteira DEA-CCR formada pelos raios formados pelos outputs e um input de um problema tem forma côncava. A partir desta idéia, pode-se assumir a existência de um lugar geométrico com o formato esférico, de forma a representar a fronteira côncava.

O MFE busca colocar todas as DMU’s na fronteira de eficiência após a distribuição de custo fixo, onde o somatório dos custos alocados a cada DMU é definido como F.

As variáveis para a formulação do MFE, considerando a situação onde se tem *s* outputs, *m* inputs e um novo input f_j a ser distribuído entre todas as *n* DMU's são:
y_{rj} valor do output r (r = 1,…,s) para a DMU j (j = 1,…,n);
x_{ij} valor do input i (i = 1,…,m) para a DMU j (j = 1,…,n);
b_r maior valor do output r considerando todas as DMU's;
a_i maior valor do input i considerando todas as DMU's;
F custo total a ser distribuído para as DMU's;
f_j valor do custo alocado à DMU j.
Para a situação onde se têm dois outputs e *m* inputs, o modelo estabelece os eixos de coordenadas, onde o numerador é o valor do output escalonado (valor do output da DMU *j* dividido pelo maior valor do output) e o denominador é a soma do custo a ser alocado para a DMU *j* com o somatório dos inputs escalonados.
O eixo das abscissas pode ser definido como:

$$\varphi_{1j} = \left(\frac{y_{1j}}{b_1} \cdot \frac{1}{f_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{a_i}} \right) \tag{1}$$

O eixo das coordenadas pode ser definido como:

$$\varphi_{2j} = \left(\frac{y_{2j}}{b_2} \cdot \frac{1}{f_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{a_i}} \right) \tag{2}$$

Considerando-se que $y_{rj} \geq 0$ e $x_{ij} \geq 0$ para todo valor de *j* e supondo que φ_{ij} (i = 1,2) pertence à circunferência de raio R, centrada na origem (0,0), com R independente de *j*, define-se:

$$R^2 = (\varphi_{1j})^2 + (\varphi_{2j})^2, \forall j \Rightarrow R = \frac{1}{(f_j + \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{a_i})} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{b_2}\right)^2} \tag{3}$$

Tal que:

$$f_j = \frac{1}{R}\sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{b_2}\right)^2} - \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{a_i} \tag{4}$$

Generalizando a distribuição para *s* outputs e *m* inputs, de forma a distribuir f_j entre todas as DMU's, obtêm-se:

$$f_j = \frac{(F + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{a_i}) . \sqrt{\sum_{r=1}^{s} \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}}{\sum_{j=1}^{n} \sqrt{\sum_{r=1}^{s} \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{x_{ij}}{a_i} \tag{5}$$

III. MODELO DE FRONTEIRA ESFÉRICA APERFEIÇOADO

Conforme apresentado no MFE original, considere um grupo de DMU's *j* (j = 1, 2,...n). Cada DMU possui um input x_{1j} e dois outputs y_{1j} e y_{2j}. Suponha que $x_{1j} > 0$, $y_{1j} > 0$ e $y_{2j} > 0$.
Deseja-se distribuir entre as DMU's, considerando os seus inputs e outputs, um custo fixo F, adotado como um novo input, de forma que todas as DMU's atinjam 100% de eficiência.
Dado que F corresponde a 100 % do custo a ser distribuído (F = 1), cada DMU *j* receberá um percentual do custo a ser distribuído, representado por p_j, tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \cdot$$

Para estabelecer a fronteira esférica, considere uma coordenada de dois eixos, onde cada eixo representa a razão do percentual do output *r* produzido pela DMU *j* pelo percentual do input *i* consumido pela DMU *j*. Desta forma, a razão entre escalares do MFE original é substituída pela razão de percentuais consumidos e produzidos. Para a situação de dois outputs e um input têm-se:

$$\varphi_1 = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}} \cdot \frac{1}{\frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}}} \tag{6}$$

$$\varphi_2 = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}} \cdot \frac{1}{\frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}}} \tag{7}$$

Dado que os eixos de coordenadas são definidos pela razão do percentual dos outputs pelo percentual do input e que a distribuição p_j é definida como a distribuição percentual de mais um input, os eixos de coordenadas podem ser redefinidos como:

$$\varphi_1 = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}} \cdot \frac{1}{p_j + \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}}} \tag{8}$$

$$\varphi_2 = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}} \cdot \frac{1}{p_j + \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}}} \tag{9}$$

Onde $x_{1j} > 0$, $y_{1j} > 0$ e $y_{2j}. > 0$, para todo *j*, e supondo que φ_1 e φ_2 pertençam a uma circunferência de raio R, centrada na origem (0,0), com R independente de *j*.

$$R^2 = (\varphi_{1j})^2 + (\varphi_{2j})^2, \forall j$$

$$R = \frac{1}{(p_j + \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}})} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}}\right)^2} \tag{10}$$

$$p_j = \frac{1}{R}\sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}}\right)^2} - \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}} \tag{11}$$

Sabendo-se que o custo total a ser distribuído entre todas as DMU's é dado por $F = \sum_{j=1}^{n} p_j = 1 \cdot$ Pode-se dizer que para todas as DMU's ter-se-á:

$$p_j = \frac{2\cdot\sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}}\right)^2}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}}\right)^2}} - \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{1j}} \tag{12}$$

Generalizando o modelo para m inputs, obtém-se:

$$\varphi_1 = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{1j}} \cdot \frac{1}{m\cdot p_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}} \tag{13}$$

$$\varphi_2 = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^{n} y_{2j}} \cdot \frac{1}{m\cdot p_j + \sum_{i=1}^{m}\frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}}} \tag{14}$$

Onde m aparece multiplicando p_j de forma a manter a proporcionalidade entre os custos a serem distribuídos e os inputs das DMU's. Desta forma, ainda que o número de inputs cresça, o custo distribuído manter-se-á proporcional.

Generalizando os valores de R e p_j para m inputs e s outputs e para n DMU's, obtém-se:

$$p_j = \left(\frac{(2m)\cdot\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^{n} y_{rj}}\right)^2}}{\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\sum_{r=1}^{s}\left(\frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^{n} y_{rj}}\right)^2}} - \sum_{i=1}^{m}\frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} x_{ij}} \right)\cdot\frac{1}{m} \tag{15}$$

IV. COMPARAÇÃO ENTRE OS MODELOS

A. *Comparação entre os modelos da literatura*

Com a finalidade de validar o MFEap, o modelo foi comparado com o MFE e com o Modelo de Alocação de Custos Fixos de Beasley [5]. Os dados numéricos utilizados, apresentados na tabela I, foram os mesmos empregados em [4], que por sua vez foram os mesmos empregados em [6].

Após a aplicação dos três modelos aos dados da tabela I, obteve-se os custos fixos a serem distribuídos para as DMU's. O modelo de Beasley e o MFE consideram que F=100. Logo, os resultados apresentados na tabela II podem ser interpretados como o percentual do custo total que cada DMU irá receber.

Comparando-se o MFE e o MFEap com o modelo de Beasley, o MFE teve uma correlação de 95% e o MFEap uma correlação de 98%, ou seja, houve uma melhora quando comparado com o modelo de Beasley.

TABELA I – informações sobre as DMU's.

DMU	OUTPUT 1	OUTPUT 2	INPUT 1	INPUT 2	INPUT 3
1	67	751	350	39	9
2	73	611	298	26	8
3	75	584	422	31	7
4	70	665	281	16	9
5	75	445	301	16	6
6	83	1070	360	29	17
7	72	457	540	18	10
8	78	590	276	33	5
9	75	1074	323	25	5
10	74	1072	444	64	6
11	25	350	323	25	5
12	104	1199	444	64	6

TABELA II: resultados dos custos a serem distribuídos.

DMU	Beasley	MFE	MFE ap
1	6,78	7,73	6,74
2	7,21	7,76	7,79
3	6,83	7,54	6,76
4	8,47	7,94	8,63
5	7,08	7,43	8,11
6	10,06	10,56	10,17
7	5,09	6,50	4,37
8	7,74	8,18	8,86
9	15,11	10,90	14,38
10	10,08	9,93	9,61
11	1,58	2,72	0,41
12	13,97	12,81	14,17

B. *Análise de sensibilidade dos modelos*

Com a finalidade de se avaliar a sensibilidade dos modelos, foram feitas alterações nos inputs e outputs dos dados apresentados na tabela I. As mudanças foram feitas com o intuito de se analisar os casos mais agudos.

No primeiro caso, o input 1 da DMU 7 foi incrementado para 1100. Ou seja, o valor inicial, 540, foi praticamente dobrado. Este dado foi escolhido pois corresponde ao maior valor de input entre todos os presentes.

TABELA III: resultados com o input 1 da DMU 7 alterado.

DMU	Beasley	Beasley	MFE	MFE	MFEap	MFEap
	Dados padrão	**Input alterado**	**Dados padrão**	**Input alterado**	**Dados padrão**	**Input alterado**
1	6,78	6,76	7,73	7,77	6,74	7,05
2	7,21	7,27	7,76	7,76	7,79	8,05
3	6,83	6,93	7,54	7,66	6,76	7,13
4	8,47	8,47	7,94	7,93	8,63	8,87
5	7,08	7,22	7,43	7,46	8,11	8,38
6	10,06	9,94	10,56	10,52	10,17	10,48
7	5,09	5,24	6,50	6,25	4,37	1,04
8	7,74	7,85	8,18	8,15	8,86	9,10
9	15,11	14,90	10,90	10,84	14,38	14,66
10	10,08	9,95	9,93	9,98	9,61	9,99
11	1,58	1,56	2,72	2,91	0,41	0,69
12	13,97	13,90	12,81	12,77	14,17	14,56

Foi calculada, utilizando o software EMS, a eficiência das DMU's com o novo input, possibilitando checar se os modelos estão cumprindo a premissa de que, após a alocação dos custos fixos, todas as DMU's ficariam eficientes.

Cabe salientar, que a lógica para a distribuição dos custos fixos, considerados como um novo input, diz que quanto mais uma DMU consome, menos ela deverá receber do novo input. Assim como, quanto mais uma determinada DMU produzir, mais de um novo input deve ser alocado para a referida DMU.

A partir desta lógica, pode-se definir a propriedade de coerência na distribuição do novo input. Onde, a partir de uma massa de dados padrão, ao se incrementar o valor de um input de uma DMU, o novo input que está sendo distribuído para esta DMU sofrerá redução e os destinados às outras sofrerão acréscimos. O raciocínio inverso é válido quando da alteração do valor de output de uma DMU. Neste caso, a DMU que teve acréscimo no output receberá mais do novo input e todas as outras terão redução.

O novo input calculado pelo modelo de Beasley fez com que todas as DMU's ficassem eficientes, no entanto, o modelo apresentou um comportamento surpreendente, pois alocou mais recurso para a DMU que recebeu mais input. Isso pode ser observado na tabela III. Outra característica foi a redistribuição dos custos para as outras DMU's de forma não coerente. Isto é, algumas tiveram incremento outras decréscimo nos custos alocados, apesar de apenas uma ter o seu valor de input alterado.

O MFE reduziu o custo alocado à DMU que teve o seu input incrementado. No entanto, esta redução foi pequena (3,8%) frente ao incremento de 100% no input. A redistribuição dos custos para as outras DMU's também não foi coerente, conforme tabela III. O modelo deixou todas as DMU's eficientes.

O MFEap reduziu em 76% o custo destinado à DMU, que teve o input incrementado em mais de 100%, e redistribuiu de forma coerente o custo para as outras DMU's. Também, todas as DMU's ficaram eficientes após a distribuição.

O MFE e o MFEap apresentaram a mesma correlação em relação ao modelo do Beasley (94%).

De forma a verificar a sensibilidade dos modelos quando da variação de um output, foi escolhido o output 2 da DMU 12, por este ser o maior de todos os outputs. O valor original de 1199 foi incrementado para 2000, pois valores maiores que este iriam causar uma distribuição negativa do custo para a DMU 11 pelo modelo MFEap.

TABELA IV: distribuição com output 2 da DMU 12 alterado.

DMU	Beasley	Beasley	MFE	MFE	MFEap	MFEap
	Dados padrão	**Output alterado**	**Dados padrão**	**Output alterado**	**Dados padrão**	**Output alterado**
1	6,78	6,23	7,73	7,32	6,74	5,94
2	7,21	6,79	7,76	7,92	7,79	7,21
3	6,83	6,62	7,54	7,82	6,76	6,22
4	8,47	7,59	7,94	7,87	8,63	7,96
5	7,08	6,88	7,43	8,06	8,11	7,75
6	10,06	8,58	10,56	9,61	10,17	8,97
7	5,09	5,03	6,50	7,03	4,37	3,98
8	7,74	7,52	8,18	8,52	8,86	8,32
9	15,11	13,01	10,90	9,70	14,38	13,13
10	10,08	9,11	9,93	8,70	9,61	8,36
11	1,58	1,50	2,72	2,35	0,41	0,01
12	13,97	21,14	12,81	15,10	14,17	22,15

O modelo de Beasley aumentou de forma correta o custo a ser alocado à DMU 12, dado que a mesma apresentou incremento no seu valor de output 2. O custo alocado aumentou em 51%, frente um acréscimo de 66% do output. No entanto, a redistribuição não foi coerente em relação às outras DMU's e todas ficaram eficientes.

O MFE reagiu coerentemente, alocando mais 18% ao custo distribuído para a DMU 12, apesar do incremento do output 2 ter sido de 66%. A distribuição para as outras DMU's ocorreu de forma não coerente e todas as DMU's ficaram eficientes.

O MFEap deixou todas as DMU's eficientes e aumentou o custo a ser alocado para a DMU 12 em 56%, frente ao incremento de 66% do output 2. Todos os custos alocados para as outras DMU's sofreram decréscimo, demonstrando coerência na redistribuição.

Em relação ao modelo de Beasley, o MFE teve 95% de correlação e o MFEap 99%.

V. OBSERVAÇÕES FINAIS

O MFEap apresentou bons resultados quando comparado com o modelo de Beasley e melhores que o MFE. A presente formulação mostrou maior coerência quando da redistribuição do custo fixo quando se tem o valor de um input ou output alterado.

Foi possível determinar o valor limite de incremento de um input, de forma que não houvesse uma distribuição negativa do custo fixo para as DMU's. O comportamento do modelo quando da alteração dos outputs também foi analisado, no entanto, esses estudos não foram apresentados neste artigo.

A metodologia DEA é uma das ferramentas mais atuais para cálculo de eficiências. O MFE e o MFEap utilizam o conceito da fronteira de eficiência para realizar a distribuição de um novo input, adotando para isso um fronteira esférica, escolhida por conveniência.

O estudo sobre modelos deste tipo possibilitará que o Comando da Aeronáutica realize de forma justa e otimizada a distribuição de recursos para as suas diversas unidade.

Eric Cézzane Cólen Guedes, colen@ita.br, Armando Z. Milioni, milioni@ ita.br,

REFERÊNCIAS

[1] J.C. Soares de Mello, L.A. Meza, E.G. Gomes, L.B. Neto. "*Curso de DEA*". XXXVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional. Gramado, RS.

[2]Charnes, A.; Cooper, W.W.; LEWIN, A. Y. *Data Envelopment Analysis: Theory, Methodology and Application*, 2 ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, 1994.

[3] Milioni, A. Z.; Mano, F. *Análise Envoltória de Dados: Um estudo de caso na Indústria Automobilística*. XXXII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Viçosa, MG.

[4] Avellar, J.V.G. Modelos DEA de soma constante de inputs/outputs. *Tese de Mestrado*, Instituto Tecnológico de Aeronáutica. 2004.

[5] Beasley, J.E. Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* 147, 198-216, 2003.

[6] Cook, W.D.; kress, M. Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach. *European Journal of Operational Research* 119, 652-661, 1999.