

# Amostragem por Importância em Cálculos da Probabilidade de Acerto em Alvos com Monte Carlo

Wilson José Vieira

Instituto de Estudos Avançados, Rodovia dos Tamoios, Km 5,5, CEP 12228-001

**Resumo** — O objetivo deste trabalho é mostrar algoritmos computacionais Monte Carlo para ilustrar conceitos básicos da amostragem por importância. O trabalho mostra alguns conceitos teóricos necessários que, em seguida, são aplicados em casos exemplos relacionados à probabilidade de acerto em alvos. São resolvidos problemas com amostragem de distribuições normais bivariadas, com ou sem correlação. Os programas de demonstração são comentados para ilustrar as aplicações. Os resultados obtidos evidenciam a eficácia da técnica para redução da variância, que pode indicar reduções significantes no tempo computacional.

**Palavras-chaves** — Métodos Monte Carlo; Amostragem por Importância; Redução da Variância; Erro Circular Provável.

## I. INTRODUÇÃO

A necessidade de reduzir os tempos de processamento em cálculos Monte Carlo foi discutida, em 1949, por H. Khan [2] e J. von Neumann [3], entre outros. A amostragem por importância, desde então, tem sido bastante utilizada [4, 5].

O propósito deste trabalho é mostrar a utilização desta técnica na solução de problemas de cálculo de probabilidade de acerto em alvos, que surgem em aplicações de Erro Circular Provável (Circular Error Probable, CEP).

A Seção II mostra alguns fundamentos matemáticos básicos da amostragem por importância. A Seção III mostra o cálculo do CEP por Monte Carlo e a Seção IV mostra exemplos do cálculo da probabilidade de acerto utilizando uma distribuição gaussiana bivariada com e sem matriz de covariância.

## II. AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA

A amostragem por importância consiste em forçar a seleção de um maior número de amostras nas partes mais importantes do problema (eventos que mais contribuem para os parâmetros a serem inferidos). Esta distorção se faz introduzindo uma nova função distribuição e os valores devem ser corrigidos por um fator peso para não alterar os resultados esperados.

Uma maneira simplificada para explicar a amostragem por importância é através do conceito de integração via Monte Carlo [1]. No entanto, para ilustrar o princípio da amostragem por importância considere a integral.

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (1)$$

O procedimento consiste em introduzir uma função importância  $i(x)$  da seguinte maneira:

$$f(x) = \frac{f(x)}{i(x)} i(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) i(x) dx}{i(x)} \frac{f(x) i(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) i(x) dx} \quad (2)$$

A distribuição modificada,  $g(x)$ , é dada por

$$g(x) = \frac{f(x) i(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) i(x) dx} \quad (3)$$

ou,

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} g(x) \quad (4)$$

Onde  $f(x)/g(x)$  é o peso de correção. É necessário calcular também o fator de normalização,  $J$ , da nova função distribuição.

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) i(x) dx \quad (5)$$

Portanto

$$g(x) = \frac{f(x) i(x)}{J} \quad (6)$$

O peso de correção pode ser escrito como

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{J}{i(x)} \quad (7)$$

O programa na Tabela 1, escrito em Scilab [6], mostra uma amostragem por importância utilizando uma função discreta. O programa ilustrado pode representar, por exemplo, 10 pelotões com 50 soldados, onde os pelotões 4 e 7 têm mais capacitação. Para simular uma batalha é mais efetivo

acompanhar mais intensivamente o desempenho desses dois pelotões, porque eles são determinantes para a vitória. No entanto, a participação dos outros pelotões também deverá ser considerada na simulação, pois eles também contribuem para o resultado da batalha.

A Fig. 1 ilustra o resultado de duas amostragens feitas com o programa na Tabela 1. A amostragem sem importância e outra com os dois pelotões com importâncias maiores. Pode-se notar que os valores concentram-se nos pelotões de maior importância. No entanto, as médias ( $fbar$ ) das duas amostragens continuam iguais a 50. Em ambos os casos, todos os pelotões são igualmente utilizados.

O ganho na amostragem por importância será visto quando o tempo gasto em cada soldado mostrar a importância dos pelotões mais capacitados.

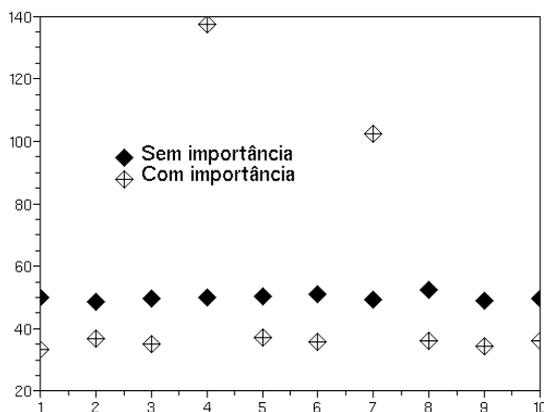


Fig. 1. Gráfico de amostragem por importância de uma distribuição uniforme.

TABELA 1. PROGRAMA DE AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO UNIFORME UTILIZANDO FUNÇÕES DISCRETAS.

//PROGRAMA	COMENTÁRIOS
<code>rand('seed',0)</code>	Garante a mesma sequência aleatória.
<code>nhist = 10000;</code>	Número total de histórias
<code>counter = zeros(1,10);</code>	Contador e eixo para o gráfico
<code>xinter = [1:1:10];</code>	
<code>f = [50,50,50,50,50,50,50,50,50,50];</code>	Distribuição original
<code>ff = sum(f); f = f / ff;</code>	fdp original
<code>i = [1,1,1,4,1,1,3,1,1,1];</code>	Distribuição da função importância
<code>ii = sum(i); i = i / ii;</code>	i tem que ser diferente de zero
<code>J = sum(f.*i); J;</code>	Fator de normalização
<code>for n = 1:10</code>	
<code>  fxi(1,n) = f(n) * i(n);</code>	
<code>  peso(1,n) = J / i(n);</code>	Criação da função peso para correção
<code>end</code>	
<code>nfdp = fxi / J;</code>	Nova distribuição fdp
<code>for n = 1:10</code>	
<code>  nfdc(1,n) = sum(nfdp(1:n));</code>	Nova distribuição fdc
<code>end</code>	
<code>for m = 1:nhist</code>	Início do loop de amostragem
<code>  rn = rand();</code>	
<code>  for n = 1:10</code>	
<code>    if nfdc(n)&gt;rn then</code>	Encontrando o intervalo da amostra
<code>      break end end</code>	
<code>    ax(1,m) = f(n)*peso(n);</code>	Corrigindo o valor amostrado
<code>    counter(n) = counter(n)+1;</code>	
<code>end</code>	Fim do loop de amostragem
<code>counter=counter/nhist*ff</code>	Frequência de eventos da nova fdp
<code>tcount=sum(counter)</code>	
<code>fbar = ff*sum(ax(1:nhist)/nhist);</code>	Média da distribuição f

### III. CÁLCULO DO ERRO CIRCULAR PROVÁVEL (CEP)

Cada tipo de bomba, míssil ou ogiva tem associado um valor de CEP, que é definido como o raio de uma área que tem probabilidade de 50% de ser atingida. O cálculo do CEP não requer amostragem por importância, porque se está interessado na região de maior densidade da distribuição. Portanto, são utilizadas funções padrões de geração de pares  $(x,y)$  de acordo com a distribuição normal uni- ou bivariada com ou sem correlação [7]. Os pares gerados são analisados para aferição da distância em que 50% deles estão do centro  $(0,0)$ . Para o caso da distribuição normal  $N(0,1)$  os resultados analíticos para o CEP e para o desvio padrão são, respectivamente, 1,18 e 1,41. Neste exemplo, o cálculo do valor do CEP é feito via integração Monte Carlo e as distribuições os eixos  $X$  e  $Y$  são independentes, sem covariância e não correlacionadas. A Tabela 2 mostra o programa Monte Carlo para o cálculo do CEP.

TABELA 2. PROGRAMA MONTE CARLO PARA CÁLCULO DO CEP.

//PROGRAMA	COMENTÁRIOS
<code>nb=100,nh=1000,</code>	<code>nb</code> conjuntos de <code>nh</code> amostras
<code>s1=0;s2=0;</code>	Contadores de médias e desvios padrões
<code>Av=0.0;Sd=1.0; // N(0,1)</code>	Modificar o programa p/ outros valores.
<code>for j=1:nb</code>	Laço de conjuntos
<code>  x=grand(1,nh,'nor',Av,Sd);</code>	<code>nh</code> valores de <code>x</code>
<code>  y=grand(1,nh,'nor',Av,Sd);</code>	<code>nh</code> valores de <code>y</code>
<code>  for k=1:nh</code>	Laço de amostragem
<code>    r(k)=sqrt(x(k)^2+y(k)^2);</code>	Distâncias do ponto $(0,0)$
<code>  end</code>	
<code>  rsort=gsort(r,'g','i');</code>	Valores de <code>r</code> em ordem crescente
<code>  j50=nh/2;</code>	Índice da amostra central (50%)
<code>  s1=s1+rsort(j50);</code>	Distância da amostra central (50%)
<code>  s2=s2+rsort(j50)^2;</code>	Para cálculo da variância
<code>  end</code>	
<code>  cepm=s1/nb</code>	CEP
<code>  sp2=(s2-s1^2/nh)/(nh-1);</code>	Variância da amostragem
<code>  scep=sqrt(sp2/nh)</code>	Desvio padrão da média
<code>//cepm = 1.1769448</code>	Resultados obtidos após a rodada
<code>//scep = 0.0111745</code>	

### IV. CÁLCULO DA PROBABILIDADE DE ACERTO EM ALVO FORA DO PONTO $(0,0)$ .

#### A. Sem Amostragem por Importância

O procedimento consiste simplesmente da amostragem de duas distribuições normais  $N(0,1)$  e em seguida o par  $(x,y)$  amostrado é verificado se está dentro do círculo do alvo.

A Fig. 2 mostra o problema resolvido sem amostragem por importância. O círculo central representa o CEP calculado pelo programa mostrado na Tabela 2. O alvo está representado no canto superior direito da figura.

Amostras fora da região do alvo podem ser utilizadas para estimativa de danos colaterais.

#### B. Com Amostragem por Importância

A região  $x > 2$  e  $y > 2$  contém o alvo e, portanto, a estatística desta região poderá ser aumentada utilizando a amostragem por importância. Para isto esta região é escolhida para compor uma função importância onde a região  $x < 2$  e  $y < 2$  tenha uma importância menor. Esta função é calculada a partir dos valores de área da distribuição normal para estes valores de  $x$  e de  $y$ . Os programas mostrados nas tabelas

podem ser utilizados sozinhos ou colocados em um só arquivo. No Apêndice o leitor pode ver a concatenação. A Figura 3 revela que a amostragem por importância aumenta significativamente a estatística na região do alvo.

**TABELA 3.** PROBABILIDADE DE ACERTAR ALVO NA POSIÇÃO ( $x=2,5$  E  $y=2,5$ ). SEM AMOSTRAGEM POR IMPORTÂNCIA

//PROGRAMA	COMENTÁRIOS
<code>s3=0;s4=0;na=10e5;timer();</code>	Contagem de tempo
<code>xc=2.5;yc=2.5;raio=0.2;</code>	Alvo em ( $x=2,5$ e $y=2,5$ ) e $r = 0,2$
<code>x=grand(1,na,'nor',Av,Sd);</code>	na amostras ( $x,y$ )
<code>y=grand(1,na,'nor',Av,Sd);</code>	
<code>for j=1:na</code>	
<code>  cir=(x(j)-xc)^2+(y(j)-yc)^2;</code>	
<code>  if cir &lt; raio then</code>	Verifica se acertou o alvo
<code>    s3=s3+1;s4=1^2;end</code>	Acertou
<code>end</code>	
<code>prob_area=s3/na</code>	
<code>sp2=(s4-s3^2/na)/(na-1)/na</code>	
<code>sprob_area=sqrt(sp2)</code>	Probabilidade de acerto
<code>sprob_areaB=sqrt(sp2B/na)</code>	Desvio padrão da média
<code>tt=timer();foml=1/(sp2*tt)</code>	Cálculo da eficiência computacional

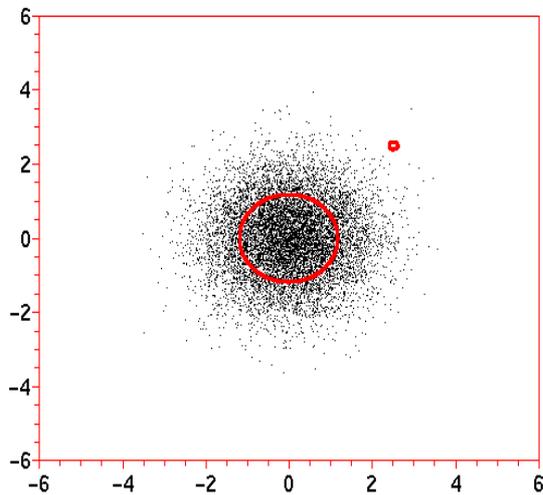


Fig. 2. Amostras sem amostragem por importância. Sem correlação.

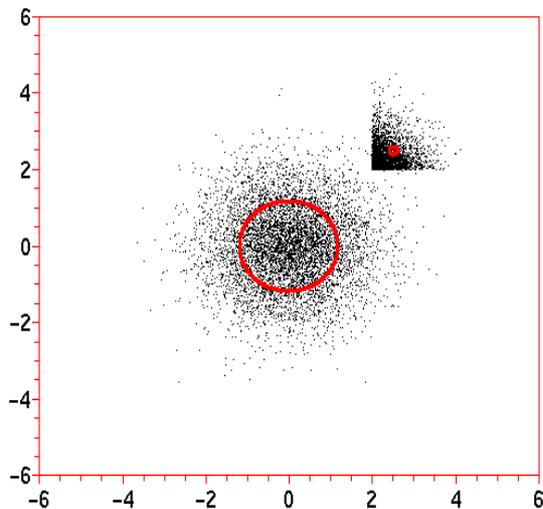


Fig. 3. Amostras com amostragem por importância. Sem correlação.

A Fig. 4 e a Fig. 5 mostram o caso de correlação entre  $x$  e  $y$ . Nesse caso,  $x$  e  $y$  não independentes e o procedimento é transformar uma distribuição bivariada sem correlação em uma distribuição bivariada com as variáveis correlacionadas. É importante notar que, para cada problema, o algoritmo da amostragem deve ser construído e verificado.

No caso da amostragem correlacionada, a região escolhida foi  $x > 2,0$ . A ordenada  $y$  foi calculada segundo [7], páginas 150-151. O programa para o caso não correlacionado encontra-se em [1]. No entanto, neste trabalho foi constatado um erro teórico em [1], que mesmo não comprometendo os resultados, mostrou aumentos de eficiência ( $FOM$ ) muito acima das encontradas após a introdução da correção teórica. O programa para o caso com correlação está no Apêndice e pode ser usado também para o caso sem correlação, bastando zerar as covariâncias para a chamada da função.

**TABELA 4.** PROBABILIDADE DE ACERTO AO ALVO EM ( $x=2,5$  E  $y=2,5$ ). RAI DO ALVO=0,2. SEM CORRELAÇÃO

xyilm	Função Importância	Prob. ± Desvio Padrão	FOM**	Número de amostras
-	Não tem.	0.000246 ± 0.0000157	1	10E06
2	(1,10)*	0.0002672 ± 0.0000164	3	10E05
2	(1,100)	0.0002429 ± 0.0000050	11	10E05
2	(1,1000)	0.0002122 ± 0.0000016	21	10E05

\* Índice 2 para a região do alvo  
\*\* Normalizada

**TABELA 5.** PROBABILIDADE DE ACERTO AO ALVO EM ( $x=2,5$ ;  $y=2,5$ ). RAI DO ALVO=0,1. COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO = 0,9.

xyilm	Função Importância	Prob. ± Desvio Padrão	FOM**	Número de amostras
-	Não tem.	0.00416 ± 0.0002035	1	10E05
2	(1,10)*	0.0040555 ± 0.0002172	1,6	10E04
2	(1,100)	0.0040543 ± 0.0001094	2,6	10E04
2	(1,1000)	0.0037170 ± 0.0000840	3,4	10E04

\* Índice 2 para a região do alvo  
\*\* Normalizada

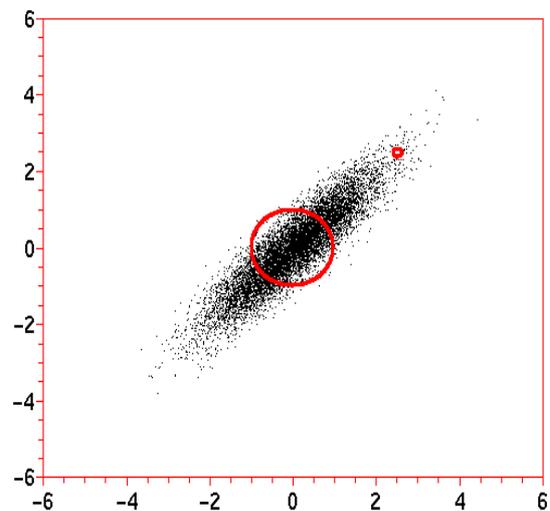


Fig. 4. Amostras sem amostragem por importância. Correlação = 0,9.

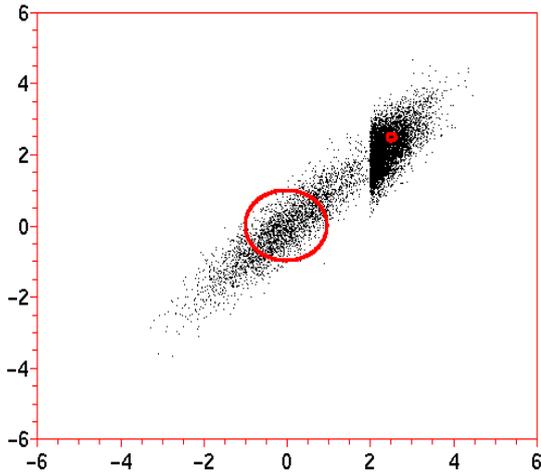


Fig. 5. Amostras com amostragem por importância. Correlação = 0,9.

Outro exemplo de interesse é a amostragem em geometria XY que pode ser associada com a análise de imagens. O programa encontra-se no final do Apêndice.

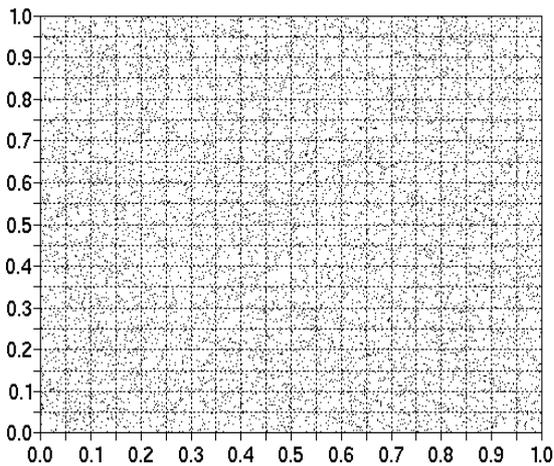


Fig. 6. Amostragem uniforme em um quadrado unitário.

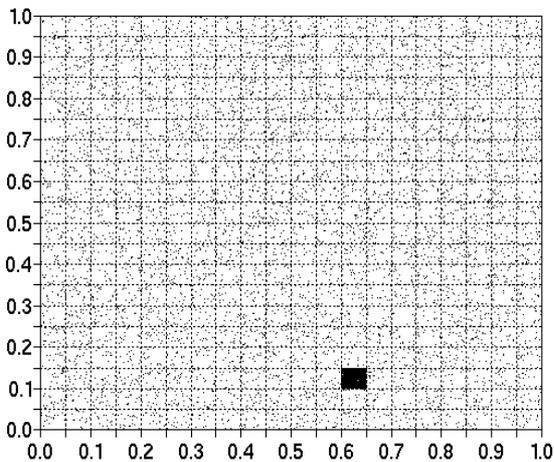


Fig. 7. Amostragem uniforme em um quadrado unitário com amostragem por importância.

Os resultados obtidos mostraram que o emprego desta técnica pode reduzir consideravelmente o tempo computacional. No entanto, esta condição é dependente da experiência e conhecimento do usuário sobre o problema a ser solucionado. Neste ponto vale lembrar que a amostragem por importância é utilizada em problemas em que são os eventos raros [8] que definem a sua solução. Por exemplo, análise de risco, apólice de seguro, transporte de radiação, etc. Portanto, é importante garantir que não haja sub-amostragem e nem distorções causadas por funções importância muito pesadas.

No caso do cálculo da probabilidade de acerto, basta calcular o fator peso e fazer amostragem somente na região mais importante. No entanto, a estimativa de dano colateral poderia ser de interesse e, nesse caso, seria utilizado o procedimento ilustrado nesse trabalho.

A evolução dos computadores permitiu a utilização extensiva de Métodos Monte Carlo e, ao mesmo tempo, dispensou a utilização de técnicas de redução da variância. Vários problemas ficaram ao alcance de soluções sem necessidade de técnicas sofisticadas. No entanto, a cada dia surgem problemas mais complexos exigindo soluções mais detalhadas e mais realísticas. Como por exemplo: análise de imagens, análise de cadeias de DNA, inferências sobre o aquecimento global, análise do fluxo de informações, estudos sobre custo de vida e níveis de consumo, simulações de mercado global, interpretação de sinais de sensores, etc. Um problema otimizado com a aplicação de amostragem por importância, com FOM relativa igual a 30 e que leva um dia de tempo computacional, levará um mês para obtenção da solução do problema original com FOM relativa igual a 1. Por esta razão os problemas mencionados acima podem exigir supercomputadores e/ou a paralelização de um grande número de CPUs.

Outro aspecto importante da amostragem por importância é que embora elas tenham sido aplicadas extensamente na literatura e estejam disponíveis em vários programas Monte Carlo, a implantação dos algoritmos de amostragem pode não ser trivial, ou levar o usuário a soluções errôneas. Para a obtenção de grande economia computacional é necessário que o usuário tenha domínio da técnica e não utilize estes programas apenas como “caixas-pretas”.

APÊNDICE

Programa de amostragem correlacionada.

```
//Este programa usa xyilm em x e y e pode ro <>0.0
clear
//Inicio
nb=10,nh=10000,//grand('setsd',0)
s1=0;s2=0;s3=0;s4=0;s5=0;s6=0;ro=0.90
Av=[0 0]';Sd=[1 ro; ro 1];xyilm=2.0
//CEP Circular Error Probable
for j=1:nb
x=grand(nh,'mn',Av,Sd);
for k=1:nh
r(k)=sqrt(x(1,k)^2+x(2,k)^2);
end
rsort=gsort(r,'g','i');
j50=nh/2;
```

```

s1=s1+rsort(j50);
s2=s2+rsort(j50)^2;
end
cepm=s1/nb
sp2=(s2-s1^2/nh)/(nh-1);
scepm=sqrt(sp2/nh)
timer();//grand('setsd',0)
//Prob. para alvo em (2.5,2.5,raio=0.1)
//Sem amostragem por importância
na=nh;xc=2.5;yc=2.5;raio=0.1;
nc=nb*nh;
xs=grand(nc,'mn',Av,Sd);
for j=1:nc
    cir=(xs(1,j)-xc)^2+(xs(2,j)-yc)^2;
    if cir < raio then
        s3=s3+1;s4=s3;end
end
prob_area=s3/nc
sp2=(s4-s3^2/nc)/(nc-1)/nc;
sprob_area=sqrt(sp2)
tt=timer(),fom1=1/(sp2*tt)
//Com amostragem por importância em
//x>xylim e y>xylim Q=probabilidade associada
s3=0;
x=grand(na,'mn',Av,Sd);
for j=1:na
    if x(1,j) >= xyylim then
        s3=s3+1; end
end
Q=s3/na;P=1-Q; s3=0;
f=[P,Q]
ff = sum(f); f = f / ff;
i = [1,100]
ii = sum(i); i = i / ii;
J = sum(f .* i);
for n=1:2
    fxi(1,n) = f(n)*i(n);
    peso(1,n) = J / i(n)
end
nfdp = fxi/J;
for n = 1:2
    nfdc(1,n) = sum(nfdp(1:n));
end
tt=timer()
//sampling
for m = 1:nh
    for n = 1:2
        if nfdc(n) >= rand() then break end
    end
    if n==2 then
        [P,Q]=cdfnor("PQ",xyylim,0,1);
        Pr=P+(1-P)*grand(1,1,'def');Qr=1-Pr;
        xi(m)=cdfnor("X",0,1,Pr,Qr);
        yyy=grand(1,1,'nor',0,1);
        yi(m)=ro*xi(m)+sqrt(1-ro^2)*yyy;
        ciro=(xi(m)-xc)^2+(yi(m)-yc)^2;
        if ciro <= raio then
            s5 = s5 + peso(n);
            s6 = s6 + (peso(n))^2; end
        else
            Pr=grand(1,1,'def');Qr=1-Pr;
            xt=cdfnor("X",0,1,Pr,Qr);
            yt=grand(1,1,'nor',0,1);

```

```

yt=ro*xt+sqrt(1-ro^2)*yt;
if xt >= xyylim then continue end
xi(m)=xt;yi(m)=yt;
end
end
prob_area_imp=s5/nh
sp2=(s6-s5^2/nh)/(nh-1)/nh;
sprob_area_imp=sqrt(sp2)
tt=timer(),fom2=1/(sp2*tt)
fomnor=fom2/fom1
set("current_figure",1)
xx=x(1,:);yy=x(2,:);xset("color",5)
xx(1)=-6;yy(1)=-6;
plot2d(xx,yy,-0,'061',' ',rect=[-5,-5,5,5]);
cir=xarc(2.4,2.6,0.2,0.2,0,360*64)
cir=xarc(-cepm,cepm,2*cepm,2*cepm,0,360*64)
set("current_figure",2)
xi(1)=-6;yi(1)=-6;
plot2d(xi,yi,-0,'061',' ',rect=[-5,-5,5,5],frameflag=0);
xset("color",5)
cir=xarc(2.4,2.6,0.2,0.2,0,360*64)
cir=xarc(-cepm,cepm,2*cepm,2*cepm,0,360*64)

```

Programa de amostragem no quadrado unitário.

```

dx=0.05,xc=0.625;yc=0.125;raio=0.01
[yinf,xinf]=meshgrid(0:dx:1-dx,0:dx:1-dx);
nh=10000;nt=(1/dx)^2
x=grand(1,nh,'def'); y=grand(1,nh,'def');
//Amostragem por importância em
f=ones(1,nt); i=f;i(53)=100;ff = sum(f); f = f / ff;
ii = sum(i); i = i / ii;J = sum(f .* i); J;
for n = 1:nt
    fxi(1,n) = f(n) * i(n); peso(1,n) = J / i(n); end
nfdp = fxi / J; for n = 1:nt
    nfdc(1,n) = sum(nfdp(1:n));end
for m = 1:nh
    rn=grand(1,1,'def');
    for n = 1:nt
        if nfdc(n) > rn then break end
    end
    xi(m)=xinf(n)+dx*grand(1,1,'def');
    yi(m)=yinf(n)+dx*grand(1,1,'def');
end

```

## REFERÊNCIAS

- [1] W. J. Vieira, "Uma Contribuição para a Utilização da Amostragem por Importância em Cálculos Monte Carlo", IX Simpósio de Logística e Pesquisa Operacional da Marinha – SPOLM, CASNAV Centro de Análise de Sistemas Navais, Rio de Janeiro, 15-16 de agosto de 2006.
- [2] H. Khan, T. E. Harris, "Estimation of Particle Transmission by Random Sampling". In: Monte Carlo Method, A. Householder, Editor, Applied Mathematics Series 12, 1951.
- [3] J. von Neumann, "Various Techniques Used in Connection with Random Digits". In: Monte Carlo Method, A. Householder, Editor, Applied Mathematics Series 12, 1951.
- [4] L. L. Carter, E. D. Cashwell, *Particle Simulation with the Monte Carlo Method*, ERDA Critical Review Series TID-26607, 1975.
- [5] M. Kalos, P. A. Whitlock, *Monte Carlo Methods Volume I: Basics*, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [6] Scilab (c)INRIA-ENPC, [www.scilab.org](http://www.scilab.org), acesso em 12/06/2006.
- [7] P. Z. Peebles, Jr., *Probability, Random Variables, and Random signal Principles*, McGraw-Hill, New York, 1993.
- [8] W. J. Vieira, P. N. Stevens, (1995). "Analysis of the sampling distribution in Monte Carlo radiation transport calculations". *Ann. Nucl. Energy* 22:51–55.