

# Modelo de Fronteira Esférica Ajustado: alocando input via DEA paramétrico

Eric Cézzane Cólen Guedes, Armando Zeferino Milioni, José Virgílio Guedes de Avellar

Instituto Tecnológico da Aeronáutica - Praça Mal. Eduardo Gomes nº50 – São José dos Campos – SP  
Instituto de Estudos Avançados - Rodovia dos Tamoios km 5,5 - São José dos Campos – SP

**Resumo** — O objetivo deste trabalho é apresentar o Modelo de Fronteira Esférica Ajustado (MFEAj), um modelo DEA paramétrico de alocação de inputs que se baseia no conceito de fronteira de eficiência empregado pela metodologia DEA. O modelo busca, após a distribuição de um novo input, deixar todas as unidades tomadoras de decisão (DMU's) DEA-CCR eficientes.

Exemplos numéricos mostraram que o MFEAj apresentou resultados mais coerentes que outros modelos da literatura. Além disso, o MFEAj apresentou uma interessante propriedade na distribuição do novo input, que não foi observada nos outros modelos estudados. Após a definição dessa propriedade, apresenta-se um teorema demonstrando que, de fato, o MFEAj pode assegurá-la. É apresentada, ainda, uma discussão sobre a distribuição em partes do novo input.

**Palavras-chaves** — DEA, DEA paramétrico, Modelo de Fronteira Esférica, alocação de custo fixo. Área principal: Análise de Envoltória de Dados.

## I. INTRODUÇÃO

Organizações com algum grau de complexidade são constituídas tipicamente por um número de unidades identificadas individualmente. Uma corporação, por exemplo, pode ter essas unidades representadas por diferentes linhas de produtos. Em uma universidade, as unidades podem ser representadas pelos diversos departamentos (Beasley, 2003). Os tomadores de decisão dessas organizações constantemente se deparam com o seguinte problema: como alocar um input (custo, insumos, recursos) ou estabelecer metas de output (bens, produtos, resultados) para as diversas unidades considerando os diversos aspectos relacionados à produção?

A fronteira de produção pode ser definida pela curva que limita num gráfico, de input dividido por output, os níveis viáveis e inviáveis de produção. Pontos sobre a curva indicam o máximo que pode ser produzido pela quantidade de input correspondente.

Os métodos paramétricos tradicionais, como o método dos mínimos quadrados, estimam a fronteira de produção pela tendência central, ou seja, obtém-se uma função média de produção e não uma função máxima, como determina a definição teórica de fronteira de produção (Angulo Meza, 2002).

A primeira definição do processo produtivo por métodos não-paramétricos foi feita em Koopmans (1951). Ele afirmou que o processo produtivo é um vetor de input/output, onde não se pode reduzir um input sem que seja necessário aumentar outro input. Assim como, não é possível aumentar um output sem reduzir outro output.

Uma medida de eficiência relativa, quando são utilizados múltiplos inputs ( $x$ ) e outputs ( $y$ ), foi definida em Farrell *et al.* (1962). Para obter a eficiência relativa de uma unidade  $j$ , Farrell *et al.* (1962) empregaram um conjunto de pesos

(variáveis) para cada input ( $v$ ) e output ( $u$ ). A eficiência relativa das unidades é dada por:

$$\text{Eficiência } j = \frac{u_1 \cdot y_{1j} + u_2 \cdot y_{2j} + \dots}{v_1 \cdot x_{1j} + v_2 \cdot x_{2j} + \dots} \quad (1)$$

A análise de envoltória de dados (DEA – Data Envelopment Analysis), através de programação linear e utilizando múltiplos inputs e outputs, é uma metodologia da estatística não paramétrica que permite avaliar a eficiência de unidades tomadoras de decisão (DMU's – Decision Making Units); identificar as DMU's consideradas benchmark (DMU's que possuem 100% de eficiência) para cada DMU ineficiente e identificar as metas de redução de inputs e aumento de outputs. Dado que eficiência é um conceito relativo, DEA identifica a eficiência de uma DMU pela comparação desta com outras DMU's que realizam tarefas semelhantes, mas que se diferenciam pelas quantidades de inputs consumidos e de outputs produzidos.

O objetivo geral de DEA é identificar uma fronteira formada pelas DMU's consideradas 100% eficientes e obter os parâmetros de melhora de desempenho desejados pela projeção das DMU's ineficientes nesta fronteira.

Inicialmente, a metodologia DEA foi aplicada sem que houvesse a preocupação com as quantidades de inputs e outputs disponíveis. No entanto, percebeu-se que existem problemas em que as quantidades de inputs e outputs são limitadas. Visando a atender esta demanda surgiram modelos DEA com soma constante de input/output.

Dentre os Modelos DEA com soma constante de input/output, podem-se identificar duas linhas de pesquisa: uma que propõe a redistribuição de um input ou output que já está presente na caracterização das unidades tomadoras de decisão, de forma que as DMU's podem sofrer redução ou aumento nos seus dados para se tornarem eficientes; e outra, que é o foco deste trabalho, onde se deseja alocar um novo input ou output, que depois de inserido nos dados que caracterizam as DMU's, tornariam todas as DMU's DEA eficientes.

DEA é uma ferramenta não paramétrica, pois, a princípio, as fronteiras de eficiência identificadas pelos modelos são calculadas livremente, não possuem uma forma definida (Cooper *et al.*, 2000). No modelo apresentado neste trabalho, a fronteira de eficiência é definida, após a distribuição de um novo input, como sendo de forma esférica. Cunha-se, portanto, o termo DEA paramétrico, ou seja, DEA onde a fronteira de eficiência tem uma forma estabelecida.

Este trabalho tem por objetivo apresentar um modelo DEA paramétrico, chamado de Modelo de Fronteira Esférica Ajustado (MFEAj), que realiza a distribuição de um novo input contínuo para um conjunto de DMU's, considerando os

seus inputs e outputs. O modelo busca, após a inclusão do novo input nos dados das DMU's, que todas as DMU's fiquem eficientes, segundo DEA e considerando o retorno de escala constante. As DMU's são tidas eficientes quando estão sobre a fronteira de eficiência calculada pelo modelo DEA que está sendo empregado. O MFEAj estabelece que a fronteira de eficiência seja de formato esférico.

## II. FRONTEIRAS EM DEA

Considerando um problema com retorno de escala constante, onde se tem se apenas um input e um output, a fronteira de eficiência é representada por uma reta. Quando se tem dois inputs e um output, a fronteira de eficiência é convexa, conforme a figura 1 (a). No caso de dois outputs e um input, a fronteira de eficiência é côncava, tal como na figura 1 (b). (Cooper et al., 2000)

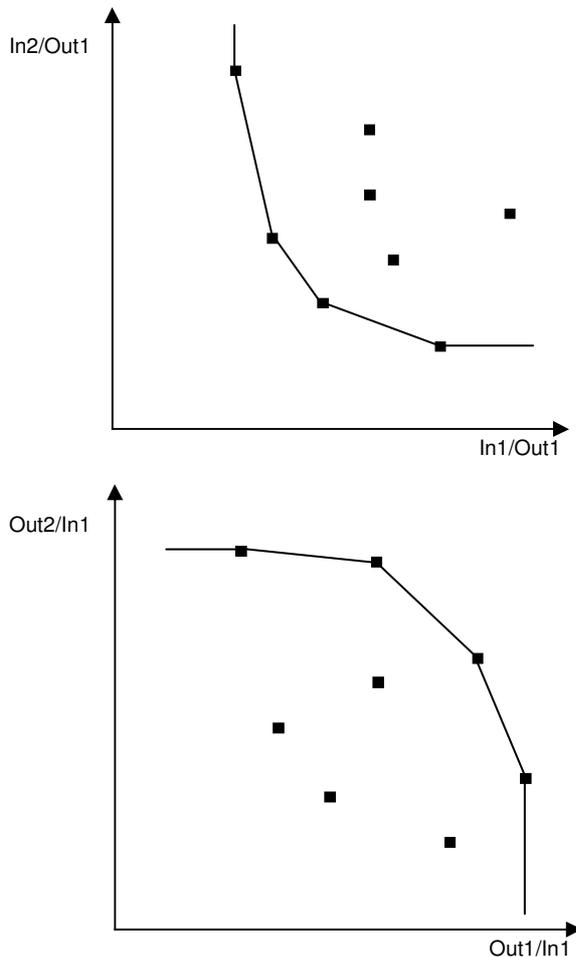


Fig. 1: (a) fronteira DEA CCR convexa; (b) fronteira DEA CCR côncava.

No modelo DEA tradicional, as fronteiras são lineares por partes. No entanto, alguns trabalhos (Soares de Mello et al., 2002) propõem um método para substituir a fronteira original, linear por partes, por uma fronteira suave. Esta nova fronteira tem derivada contínua em todos os pontos e evita múltiplas soluções para os pesos nos pontos de eficiência extremo (Soares de Mello et al., 2002). A formulação do MFEAj adota a característica da fronteira DEA suavizada, onde a fronteira linear por partes é substituída por uma fronteira contínua em forma de arco ou como uma “casca” de esfera.

Dado que a fronteira do MFEAj é DEA CCR, um aumento nos valores de input causa um aumento proporcional nos outputs. Isto é,  $f(k.\vec{X}) = k.f(\vec{X})$ , onde  $f$  é homogêneo em primeiro grau (Soares de Mello et al., 2001). Portanto, o MFEAj deve obedecer ao teorema de Euler para funções homogêneas:  $\vec{X}.\vec{\nabla}f = n.f$ .

## III. ALOCAÇÃO DE RECURSOS

Dentre os trabalhos a respeito de alocação de inputs, destaca-se o apresentado por Golany et al. (1993), onde os recursos são distribuídos de acordo com as eficiências (ponderadas) das DMUs. Este estudo, também classificado como de determinação de alvos, usa o modelo DEA aditivo (Charnes et al., 1985). Os modelos de alocação de recursos de Athanassopoulos (1995, 1998) são outros exemplos de modelos de alocação. O primeiro é baseado em programação por metas e DEA, e a fronteira de eficiência é caracterizada de maneira semelhante ao modelo DEA do envelope (Athanassopoulos, 1995). As DMU's neste modelo são apresentadas de maneira global com relação aos alvos organizacionais. No segundo modelo, o conjunto de possibilidades de produção é apresentado com restrições, o que lembra o modelo DEA dos multiplicadores (Athanassopoulos, 1998).

Beasley (2003), citado por Soares de Mello (2006) e Guedes (2007), apresenta um modelo de alocação de custos fixos e recursos que partem da reinterpretação de DEA. Neste trabalho, um novo input é alocado de forma maximizar a eficiência média da DMU's.

Existem alguns trabalhos onde a quantidade de recursos que está sendo alocada é limitada. Em Gomes et al. (2004, 2003), Gomes (2003) e Estellita Lins et al. (2003) é proposto o modelo DEA com Ganhos de Soma Zero (DEA-GSZ), no qual a restrição dos modelos DEA clássicos de total liberdade de produção ou de uso dos recursos é substituída pela restrição de soma total constante de inputs ou outputs. Assim, nos modelos DEA-GSZ, CCR ou BCC, uma DMU ineficiente que busque a fronteira pelo aumento de outputs (redução de inputs) imputará às demais a redução do valor de seus outputs (ou aumento de seus inputs) de modo a manter a soma total constante. Assim, os modelos DEA-GSZ têm aplicação direta nos estudos de alocação ou (re)alocação de recursos (ou de produção), em que a restrição de soma constante seja uma necessidade da modelagem.

Avellar (2004), trabalho que deu origem ao desenvolvido em Guedes (2007), propõe quatro modelos tipo DEA baseados em inputs/outputs limitados, nos quais a distribuição dos recursos/produção pode ser influenciada tanto pelos inputs quanto pelos outputs envolvidos. Os modelos buscam estabelecer uma fronteira de eficiência com formato esférico quando da alocação ou realocação de um novo input ou uma fronteira de eficiência com formato hiperbólico quando da alocação ou realocação de um novo output.

Além desses trabalhos, pode-se citar Cook & Kress (1999), que se baseia na idéia de que as eficiências das DMU's mantêm-se inalteradas caso, num problema com um input e um output, um novo input seja distribuído proporcionalmente à quantidade de input de cada DMU, ou seja, considera apenas a quantidade de input da DMU para alocar um novo input. Para Cook & Kress (1999), DMU's com a mesma

quantidade de input receberiam a mesma porção do novo input, independente da quantidade de output produzida.

O modelo proposto por Kozyreff & Milioni (2004) coloca as metas a serem estabelecidas para cada DMU sobre uma fronteira de produção DEA, designada por hipótese pela forma côncava de um lugar geométrico representado por um quarto de circunferência. No entanto, este modelo apresenta problemas de consistência com o formato da fronteira, conforme apontado em Avellar (2004).

Soares de Mello *et al.* (2006) propõe um algoritmo de alocação de recursos discretos com análise DEA. Este artigo apresenta um modelo seqüencial de atribuição de recursos em modelos DEA, considerando-se que o excesso de recursos a ser distribuído tem soma constante.

#### IV. MODELO DE FRONTEIRA ESFÉRICA (MFE)

Para se chegar ao Modelo de Fronteira Esférica Ajustado (MFEAj), inicia-se com uma breve revisão do Modelo de Fronteira Esférica (MFE), apresentado em Avellar (2004). O MFE é um modelo que foi desenvolvido para a distribuição de um novo input de forma que, após a inclusão do novo input na caracterização das DMU's, todas as DMU's fiquem DEA-CCR eficientes sobre uma fronteira de eficiência esférica. Para isso, o MFE busca, dentre uma família de circunferências com centro na origem, colocar todas as DMU's na fronteira de eficiência após a distribuição de um novo input, cuja soma total é  $F = 100$ . Baseia-se na definição de que a fronteira de eficiência para um modelo DEA com retorno de escala constante tem o formato côncavo (Cooper, 2000), quando se deseja representar output/input nos eixos de coordenadas.

Para a definição e desenvolvimento do MFE e do MFEAj, considere as seguintes variáveis:

$y_{rj}$  valor do output  $r$  ( $r = 1, \dots, s$ ) para a DMU  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ );  
 $x_{ij}$  valor do input  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) para a DMU  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ );  
 $b_r$  maior valor do output  $r$  considerando todas as DMU's;  
 $a_i$  maior valor do input  $i$  considerando todas as DMU's;  
 $F$  custo total a ser distribuído para as DMU's;  
 $f_j$  valor do input alocado à DMU  $j$ .

Considere um problema com dois outputs ( $y_{1j}$  e  $y_{2j}$ ) e  $m$  inputs ( $x_{ij}$ ). As coordenadas das DMU's são definidas pela razão entre os outputs escalonados (valor do output da DMU dividido pelo maior valor de output correspondente) e o somatório dos inputs escalonados (valor do input da DMU dividido pelo maior valor de input correspondente). Deseja-se

distribuir um novo input  $f_j$ , tal que  $\sum_{j=1}^n f_j = F$ , para cada

DMU. Após a distribuição do novo input, as coordenadas serão definidas, tal que, o numerador é o valor de um dos outputs escalonado e o denominador é a soma do novo input a ser alocado para a DMU  $j$  com o somatório dos inputs escalonados. Os eixos das abscissas e ordenadas são dados por, respectivamente (Avellar *et al.*, 2006):

$$\varphi_{1j} = \left( \frac{y_{1j}}{b_1} \cdot \frac{1}{f_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{a_i}} \right) \quad (2)$$

$$\varphi_{2j} = \left( \frac{y_{2j}}{b_2} \cdot \frac{1}{f_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{a_i}} \right) \quad (3)$$

Um lugar geométrico (fronteira de eficiência) correspondente a uma circunferência com raio  $R$  e centro na origem será estabelecido para todos os pontos  $\varphi_{ij}$ , ( $i = 1, 2$ ) com a condição de que:

$$R^2 = (\varphi_{1j})^2 + (\varphi_{2j})^2 \Rightarrow R = \frac{1}{f_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{a_i}} \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{b_2}\right)^2} \quad (4)$$

Generalizando a distribuição do input  $f_j$  entre todas as  $n$  DMU's com  $s$  outputs e  $m$  inputs, obtêm-se (Avellar *et al.*, 2006):

$$f_j = \frac{(F + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{a_i}) \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^s \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{r=1}^s \left(\frac{y_{rj}}{b_r}\right)^2}} - \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{a_i} \quad (5)$$

Desta forma, a equação (5) calcula o valor do novo input ( $f_j$ ) que a DMU  $j$  deverá receber para ficar na fronteira de eficiência esférica de acordo com o Modelo de Fronteira Esférica.

#### V. CRÍTICA AO MODELO DE FRONTEIRA ESFÉRICA

A definição das coordenadas das DMU's na fronteira de eficiência esférica pelo MFE, quando da distribuição do novo input, pode atribuir uma importância desproporcional ao novo input, dependendo do contexto, em relação aos inputs que caracterizam as DMU's.

No denominador das equações (2) e (3), pode-se observar a soma entre o novo input que está sendo distribuído e o somatório dos inputs escalonados das DMU's ( $f_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{a_i}$ ).

A falta de uma proporcionalidade adequada do novo input decorre desta soma.

Para ilustrar este problema, considere um conjunto de 100 DMU's com  $s$  outputs, cujas dimensões não geram nenhum problema de proporcionalidade, e 20 inputs com valores muito próximos. Nesta situação, como se tem um somatório dos inputs escalonados, o resultado do somatório será próximo de 20. Dado que  $f_j$  é uma fração de 100 a ser dividida entre 100 DMU's, o novo input ( $f_j$ ) que está sendo alocado será desproporcional (pouca importância) em relação ao conjunto de inputs das DMU's (1 para 20), conforme pode ser visto no denominador das equações (2) e (3).

Em outro caso, suponha que a quantidade de DMU's e de inputs seja 5. No melhor caso para o modelo, o somatório dos inputs escalonados terá valor próximo a 5. Dado que  $f_j$  é uma fração de 100 a ser dividida entre 5 DMU's, este será desproporcional (muita importância) ao conjunto de inputs das DMU's (20 para 5) na definição das coordenadas.

Além da falta de uma proporcionalidade adequada do novo input, será mostrado mais adiante que o fato de definir as coordenadas com valores escalonados faz com que o MFE tenha pouca sensibilidade quando há ruído nos dados. Visando solucionar este problema foi proposto o Modelo de Fronteira Esférica Ajustado.

## VI. MODELO DE FRONTEIRA ESFÉRICA AJUSTADO (MFEAj)

O Modelo de Fronteira Esférica Ajustado (MFEAj) diferencia-se do MFE principalmente pelo fato de trabalhar com percentuais dos inputs e outputs totais do problema que uma DMU consome ou produz, respectivamente, ao invés de valores escalonados. Esta é a principal alteração em relação ao MFE na tentativa de manter a proporcionalidade entre o input que está sendo distribuído e o conjunto de inputs das DMU's, assim como conferir maior sensibilidade ao modelo. Tal como o MFE, o MFEAj busca colocar todas as DMU's na fronteira de eficiência esférica. Por trabalhar com percentuais, o novo input que se deseja alocar, chamado de  $p_j$ , é distribuído na forma de percentual do montante total  $F = 1$ , ou seja,  $\sum_{j=1}^n p_j = 1$ .

A definição da fronteira de eficiência esférica exige que as DMU's possuam mais de dois outputs. Esta é a condição mínima necessária para se definir as coordenadas que localizam as DMU's.

Para o desenvolvimento do MFEAj, considere um conjunto de  $n$  DMU's com dois outputs. As coordenadas, razão entre o percentual de um dos outputs produzidos por uma DMU  $j$  pelo percentual do novo input que está sendo distribuído para cada DMU, são definidas por:

$$\varphi'_{1j} = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \cdot \frac{1}{p_j} \quad (6)$$

$$\varphi'_{2j} = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \cdot \frac{1}{p_j} \quad (7)$$

As coordenadas estabelecidas por  $\varphi'_{ij}$  ( $i = 1,2$ ) estarão na fronteira de eficiência esférica definida pela circunferência de raio  $R$ , desde que:

$$R^2 = (\varphi'_{1j})^2 + (\varphi'_{2j})^2, \forall j \Rightarrow R = \frac{1}{p_j} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}}\right)^2} \quad (8)$$

$$p_j = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}}\right)^2} \quad (9)$$

Sabendo-se que  $\sum_{j=1}^n p_j = F$ , têm-se:

$$F = \sum_{j=1}^n p_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}}\right)^2} \quad (10)$$

$$R = \frac{1}{F} \cdot \sum_{j=1}^n \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}}\right)^2} \quad (11)$$

$$p_j = F \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}}\right)^2}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\left(\frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}}\right)^2 + \left(\frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}}\right)^2}} \quad (12)$$

Considere agora que as  $n$  DMU's são caracterizadas por dois outputs e um input. As coordenadas da DMU  $j$  são definidas pela razão entre o percentual de um dos outputs e o percentual do input gasto pela DMU, tal que:

$$\varphi'_{1j} = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \cdot \frac{1}{\frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \quad (13)$$

$$\varphi'_{2j} = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \cdot \frac{1}{\frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \quad (14)$$

Estas são as coordenadas da DMU  $j$  num plano antes da alocação do novo input. A distribuição do percentual do novo input ( $p_j$ ) para as DMU's deve redefinir as coordenadas das DMU's para que todas fiquem na fronteira de eficiência esférica. As novas coordenadas são definidas por:

$$\varphi'_1 = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \cdot \frac{1}{p_j + \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \quad (15)$$

$$\varphi'_2 = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \cdot \frac{1}{p_j + \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \quad (16)$$

As coordenadas do MFEAj são definidas por uma razão entre percentuais de output por percentuais de input. Quando as n DMU's são caracterizadas por dois outputs e um input, no denominador tem-se a soma entre o percentual do novo input com o percentual do input total consumido pela DMU. Ou seja, o valor de  $p_j$  será entre 0 e 1 e partilhado entre n DMU's, da mesma forma que o percentual do input a que é somado.

Na generalização do MFEAj, para n DMU's com 2 outputs e m inputs, utilizou-se um artifício de forma que não houvesse perda de proporcionalidade entre o percentual do novo input e o somatório dos percentuais dos m inputs das DMU's. Para isso, quando da definição das coordenadas, o percentual do novo input que está sendo distribuído foi multiplicado pela quantidade m de inputs que caracterizam as DMU's. Assim,  $p_j$ , que é um valor entre 0 e 1 e cuja soma total de todos os  $p_j$ 's é 1, ao ser multiplicado pela quantidade m de inputs, mantém a relevância em relação ao somatório dos percentuais dos m inputs das DMU's.

Pode-se definir as coordenadas na fronteira de eficiência esférica para n DMU's com dois outputs e m inputs por:

$$\varphi'_1 = \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \cdot \frac{1}{m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \quad (17)$$

$$\varphi'_2 = \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \cdot \frac{1}{m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \quad (18)$$

O raio R da fronteira de eficiência esférica para dois outputs é tal que:

$$R^2 = (\varphi'_{1j})^2 + (\varphi'_{2j})^2, \forall j \quad (19)$$

$$R = \frac{1}{m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \cdot \sqrt{\left( \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \right)^2 + \left( \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \right)^2} \quad (20)$$

$$m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}} = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\left( \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \right)^2 + \left( \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \right)^2} \quad (21)$$

Pode-se mostrar que a função que define a fronteira no MFEAj é homogênea em primeiro grau. Considere que a

soma dos inputs  $m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}$  é representada pela

letra  $W_j$ . A partir da equação (21) tem-se:

$$m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}} = W_j = f(y_{1j}, y_{2j}) \quad (22)$$

$$\frac{1}{R} \cdot \sqrt{\left( \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \right)^2 + \left( \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \right)^2} \quad (23)$$

Logo, f é homogêneo em primeiro grau para todo  $t > 0$  pois:

$$f(t(y_{1j}, y_{2j})) = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\left( \frac{t \cdot y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \right)^2 + \left( \frac{t \cdot y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \right)^2} \quad (24)$$

$$\frac{t}{R} \cdot \sqrt{\left( \frac{y_{1j}}{\sum_{j=1}^n y_{1j}} \right)^2 + \left( \frac{y_{2j}}{\sum_{j=1}^n y_{2j}} \right)^2} = t(f(y_{1j}, y_{2j})) \quad (25)$$

Generalizando para s outputs, tem-se:

$$R^2 = (\varphi'_{1j})^2 + \dots + (\varphi'_{sj})^2, \forall j$$

$$R = \frac{1}{m \cdot p_j + \sum_{i=1}^m \frac{x_{1j}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}}} \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2} \quad (26)$$

O percentual do novo input para n DMU's com m inputs e s outputs é dado por:

$$p_j = \frac{(2m) \cdot \sqrt{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2}} - \sum_{i=1}^m \frac{x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \cdot \frac{1}{m} \quad (27)$$

Após o desenvolvimento apresentado, tem-se na equação (27) o percentual do novo input que a DMU *j* irá receber quando da alocação de um novo input para as *n* DMU's com *s* outputs e *m* inputs. A distribuição do novo input proposta pelo MFEAj é comparada com distribuições realizadas pelo MFE original e pelo modelo de alocação de custo e recurso via DEA de Beasley (2003).

#### VII. COMPARAÇÃO ENTRE MODELOS

Os dados de inputs e outputs que caracterizam as DMU's utilizadas na comparação entre os modelos de Beasley, MFE e MFEAj foram extraídos de Beasley (2003) e são apresentados na Tabela 1. Foram acrescentadas à tabela as eficiências das DMU's antes da distribuição do novo input. Os três modelos foram empregados para realizar a distribuição do novo input, cuja soma total é igual a 100, ou seja,  $F = 100$ . Desta forma, os resultados podem ser interpretados como o percentual do novo input estimado pelos modelos que uma DMU irá receber. Após a inclusão do novo input, foi calculada a eficiência das DMU's utilizando o software EMS (EMS 1.3).

**TABELA I:** dados utilizados na comparação (Beasley, 2003).

DMU	OUT 1	OUT 2	IN 1	IN 2	IN 3	EFIC
1	67	751	350	39	9	76%
2	73	611	298	26	8	92%
3	75	584	422	31	7	75%
4	70	665	281	16	9	100%
5	75	445	301	16	6	100%
6	83	1070	360	29	17	96%
7	72	457	540	18	10	86%
8	78	590	276	33	5	100%
9	75	1074	323	25	5	100%
10	74	1072	444	64	6	83%
11	25	350	323	25	5	33%
12	104	1199	444	64	6	100%

O resultado obtido pelo MFEAj possui uma correlação de 98% com o resultado obtido pelo modelo de Beasley, definido como referência. A distribuição proposta pelo MFE (Avellar et al., 2006) tem uma correlação de 95% com o modelo de Beasley.

**TABELA II:** percentual do novo input alocado às DMU's.

DMU	Beasley	MFE	MFEAj
1	6,8	7,7	6,7
2	7,2	7,8	7,8
3	6,8	7,5	6,8
4	8,5	7,9	8,6
5	7,1	7,4	8,1
6	10,1	10,6	10,2
7	5,1	6,5	4,4
8	7,7	8,2	8,9
9	15,1	10,9	14,4
10	10,1	9,9	9,6
11	1,7	2,7	0,4
12	14,0	12,8	14,2

O percentual do novo input que cada DMU irá receber, de acordo com a distribuição proposta pelos modelos para as DMU's caracterizadas na Tabela 1, é apresentado na Tabela 2. Estes valores foram inseridos como um quarto input na caracterização das DMU's e verificou-se que todas as DMU's ficaram DEA-CCR eficientes.

#### VIII. ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DOS MODELOS

Na seção 7 foi apresentada a distribuição de um novo input realizada para um conjunto de DMU's cujos dados foram obtidos de Beasley (2003). No entanto, com frequência as informações que caracterizam as DMU's são imprecisas e sofrem interferência de ruídos. Pode-se, ainda, ter o interesse de se gerar ruídos de maneira a se verificar os limites de ruído nos inputs e outputs. Os ruídos naturais ou provocados, tratados simplesmente como ruídos, irão alterar o resultado da distribuição do novo input ou mesmo inviabilizar a aplicação de uma determinada ferramenta de alocação de um novo input.

Com a finalidade de se avaliar os efeitos dos ruídos nos valores de input e output das DMU's na distribuição de um novo input, foram inseridos ruídos nos dados da Tabela 1. Esses ruídos foram adicionados aos maiores valores dos inputs e outputs das DMU's, com o objetivo de se avaliar os efeitos sobre a distribuição de um novo input nos casos mais agudos. O procedimento adotado foi a inserção do ruído nos dados originais da Tabela 1 e distribuição do novo input com os dados alterados. A seguir, fez-se a comparação entre o resultado da alocação do novo input (Tabela 2) realizada para os dados da Tabela 1 (originais) com o resultado da distribuição do novo input proposta pelos modelos para os dados com ruído.

Inicialmente, escolheu-se o maior valor de input dentre todos os presentes. Desta forma, o input 1 da DMU 7 foi aumentado de 540 para 1100, ou seja, o valor original foi pouco mais que dobrado. A Tabela 3 (Anexo 1) apresenta para cada modelo o percentual do novo input proposto pelos modelos com os dados originais, o percentual do novo input com o ruído no input 1 da DMU 7 e a alteração sofrida na alocação feita para os dados originais em relação à distribuição com input alterado.

Como anteriormente, o percentual do novo input, distribuído para as DMU's com ruído, foi inserido como um quarto input na massa de dados. A seguir, foi calculada a eficiência das DMU's com o software EMS, agora caracterizadas com dois outputs e quatro inputs.

Como era de se esperar, verificou-se que as distribuições do novo input, quando da presença do ruído positivo, propostas pelos MFE e MFEAj, deixaram todas as DMU's eficientes. A alocação do novo input pelo modelo de Beasley fez com que todas as DMU's ficassem eficientes, exceto a DMU 3 que ficou apenas tecnicamente eficiente, ou seja, a DMU está na fronteira de eficiência mas existe alguma DMU eficiente com melhores valores de output ou input.

Quando da alocação de um novo input para um conjunto de DMU's caracterizadas por inputs e outputs, o senso da literatura diz que as DMU's que mais inputs consomem, menos devem receber de um novo input que está sendo distribuído. Assim como, as DMU's que mais produzem outputs, mais devem receber de um novo input a ser alocado. A partir da comparação entre a alocação de um novo input realizada pelo MFEAj para as DMU's com os dados sem

ruído e a alocação realizada quando da presença de ruído positivo no input de uma das DMU's, pode-se perceber que o MFEAj comportou-se conforme o senso acima comentado. Ou seja, a DMU na qual foi inserido o ruído positivo em um de seus inputs recebeu menos do novo input que está sendo distribuído e, dado que a soma do novo input é constante e nenhuma alteração foi feita nos parâmetros que caracterizam as outras DMU's, todas as outras DMU's receberam mais do novo input. Caso o ruído fosse negativo, a DMU com o ruído negativo no input receberia mais do novo input e as DMU's sem ruído receberiam menos.

O novo input calculado pelo modelo de Beasley deixou todas as DMU's eficientes, com exceção da DMU 3, que ficou apenas tecnicamente eficiente. O modelo apresentou um comportamento surpreendente, contrariando o senso da redistribuição de um novo input quando da presença de um ruído positivo no input de uma DMU. O modelo de Beasley alocou uma quantidade maior do novo input que está sendo distribuído à DMU com ruído no input, quando comparada com a primeira alocação realizada para as DMU's sem ruído. Outra característica do modelo de Beasley foi a redistribuição não coerente entre as DMU's sem alteração nos dados. Isto é, algumas DMU's sofreram aumento e outras decréscimo no montante do novo input distribuído.

O MFE reduziu a quantidade do novo input alocado à DMU com ruído positivo nos dados. No entanto, esta redução foi muito pequena (3,8%) quando comparada com o aumento de 100% no valor original do input. O MFE não redistribuiu de forma coerente o novo input entre as DMU's sem alteração nos dados, ou seja, estas DMU's deveriam ter recebido mais do novo input quando comparada com a distribuição sem ruído na DMU 7. No entanto, algumas receberam mais e outras menos, sendo que todas as DMU's ficaram eficientes após a distribuição.

O MFEAj reduziu em 76% o input que está sendo distribuído para a DMU que sofreu aumento de 100% no valor de um seus inputs. A redistribuição do input para as outras DMU's foi coerente e todas ficaram eficientes.

O ruído positivo no input 1 da DMU 7 fez com que a distribuição proposta pelo MFE e MFEAj tivessem uma correlação de 94% com a alocação proposta pelo modelo de Beasley.

Continuando o estudo sobre a sensibilidade dos modelos, foi realizada uma simulação com a inserção de um ruído positivo num output. Para isso, foi escolhido o output 2 da DMU 12, por este ser o maior entre todos os outputs. O valor original do output, de 1199, foi aumentado para 2000. Os resultados da distribuição do novo input, quando o output 2 da DMU 12 está com ruído positivo, são apresentados na Tabela 4 (Anexo 1).

A distribuição realizada pelo modelo de Beasley tornou todas as DMU's eficientes. A DMU 12, que possui o ruído positivo de 66% no output 2, teve um incremento de 51% na alocação do novo input em relação à distribuição sem ruído no output. A distribuição do novo input pelo modelo de alocação de Beasley, quando da presença de ruído positivo no output 2 da DMU 12, apresentou a propriedade da redistribuição coerente do novo input. Pode-se verificar na Tabela 4 que a quantidade do novo input para a DMU com ruído positivo no output aumentou e o valor do novo input para as outras DMU's que não sofreram alteração nos dados reduziu, como esperado.

O MFE deixou todas as DMU's eficientes após a distribuição, sendo que a DMU 12 recebeu 18% a mais do

novo input quando comparada com a distribuição sem ruído na informação. Todavia, foi uma reação modesta para o ruído positivo inserido de 66 % no output 2. A alocação para as DMU's sem ruído nos dados não ocorreu de forma coerente, ou seja, algumas DMU's sofreram aumento na quantidade do novo input, enquanto outras sofreram redução no valor do novo input distribuído.

A redistribuição promovida pelo MFEAj atendeu a propriedade da redistribuição coerente e deixou todas as DMU's eficientes. A DMU 12 teve um aumento de 56% no novo input, demonstrando o que parece ser uma maior coerência com o aumento de 66% no output 2.

Em relação à distribuição realizada pelo modelo de Beasley, o MFE apresentou uma correlação de 95%, enquanto o MFEAj, uma correlação de 99%.

Pode-se perceber que o MFEAj mostrou-se válido para realizar a distribuição de um novo input. O modelo realizou uma correção na quantidade do novo input, a ser alocada para a DMU com ruído, mais compatível ao tamanho do ruído do que os outros modelos de alocação. Além disso, o modelo apresentou a propriedade de redistribuição coerente de um novo input quando da interferência de um ruído no input ou output de uma DMU, fato não observado nos outros modelos. A propriedade de redistribuição coerente tem grande valor, pois ela permite prever o comportamento do modelo quando da variação dos dados. A propriedade possibilita prever a reação do modelo na presença de um ruído e identificar os limites aceitáveis de ruído. Esta característica agrega maior conhecimento quando do emprego do modelo em diferentes problemas.

A propriedade de redistribuição coerente, após a percepção ou inserção de um ruído nas informações, pode ser demonstrada por um teorema para o Modelo de Fronteira Esférica Ajustado.

#### IX. TEOREMA DA PROPRIEDADE DE REDISTRIBUIÇÃO COERENTE

Seja um conjunto de  $n$  DMU's caracterizadas por  $s$  outputs e  $m$  inputs. Suponha que um novo input  $m+1$  é distribuído para todas as  $n$  DMU's através do MFEAj. O valor do novo input  $m+1$  associado a cada DMU é chamado de  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Suponha agora que dentre os  $m$  inputs descobre-se que há um erro (ruído) no dado do input  $g$  da DMU  $k$ , cujo valor correto é  $g_k + \delta_k$ , ao invés de  $g_k$ . O MFEAj é novamente empregado para fazer a distribuição do input  $m+1$  e o novo resultado é chamado de  $p'_j$ .

Então, caso  $\delta_k > 0$ :

$$p'_j > p_j, \quad \forall j \neq k \text{ e} \\ p'_k < p_k$$

Caso  $\delta_k < 0$ :

$$p'_j < p_j, \quad \forall j \neq k \text{ e} \\ p'_k > p_k$$

Da mesma forma, seja um conjunto de  $n$  DMU's caracterizadas por  $s$  outputs e  $m$  inputs. Suponha que um

novo input  $m+1$  é distribuído para todas as  $n$  DMU's através do MFEAj. O valor do novo input  $m+1$  associado a cada DMU é chamado de  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Suponha agora que dentre os  $s$  outputs descobre-se que há um erro (ruído) no dado do output  $q$  da DMU  $k$ , cujo valor correto é  $q_k + \delta_k$ , ao invés de  $q_k$ . O MFEAj é novamente empregado para fazer a distribuição do input  $m+1$  e o novo resultado é chamado de  $p'_j$ .

Então, caso  $\delta_k > 0$ :

$$\begin{aligned} p'_j &< p_j, \quad \forall j \neq k \text{ e} \\ p'_k &> p_k \end{aligned}$$

Caso  $\delta_k < 0$ :

$$\begin{aligned} p'_j &> p_j, \quad \forall j \neq k \text{ e} \\ p'_k &< p_k \end{aligned}$$

Na equação (23) pode-se constatar que um ruído no valor do input de uma das DMU's interfere apenas no segundo termo da subtração. Fazendo o primeiro termo da subtração igual a  $T_1$  e retirando ao fator multiplicativo  $1/m$ , tem-se:

$$p_j = T_1 - \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_{1j}} \quad (28)$$

Todavia, a presença do ruído  $\delta_k$  no input da DMU  $k$  exige uma nova distribuição do novo input para as DMU's de acordo com:

$$p'_j = T_1 - \frac{\sum_{i=1, i \neq g}^m x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} - \frac{x_{gj}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n x_{gj}}, \text{ onde } j \neq k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (29)$$

$$p'_k = T_1 - \frac{\sum_{i=1, i \neq g}^m x_{ik}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} - \frac{x_{gk} + \delta_k}{\delta_k + \sum_{j=1}^n x_{gj}} \quad (30)$$

A partir da comparação entre o  $p_j$  e  $p'_j$  (os percentuais do novo input destinados às  $n-1$  DMU's sem ruído no valor de input), pode-se observar que o numerador do percentual do input com ruído subtraído de  $T_1$  manteve-se o mesmo e o denominador sofreu um acréscimo, caso  $\delta_k > 0$ , ou redução se  $\delta_k < 0$ .

Desta forma, quando a DMU  $k$  possui um ruído positivo no seu input, há uma redução no percentual do input com ruído que subtrai  $T_1$  no cálculo do  $p'_j$  (equação 25), donde se conclui que  $p'_j > p_j$ . Quando  $\delta_k < 0$ , o termo do percentual do input com ruído aumenta, mostrando que  $p'_j < p_j$ . Logo, um ruído positivo no input de uma DMU  $k$  provoca o aumento do percentual do novo input destinado às outras  $n-1$  DMU's sem ruído, e um ruído negativo provoca a redução do percentual do novo input para as  $n-1$  DMU's sem ruído.

Na equação (26), para a obtenção do  $p'_k$  (o percentual do novo input na redistribuição destinado a DMU  $k$  com ruído no input), observa-se que o numerador e o denominador são acrescidos de  $\delta_k$ . Dado que  $x_{1k} < \sum_{j=1}^n x_{1j}$ , quando  $\delta_k > 0$ ,

segundo termo da subtração na equação (26) vai ser maior, logo  $p'_k < p_k$ . Quando  $\delta_k < 0$ , o segundo termo da subtração é reduzido, logo  $p'_k > p_k$ . Fica provado que a DMU  $k$  com ruído positivo no input recebe menos de um novo input e as  $n-1$  DMU's sem ruído recebem mais do novo input, quando comparadas com a distribuição realizada sem o ruído na informação. Para um ruído negativo, a DMU  $k$ , com o ruído no input, recebe um percentual maior do novo input e as outras  $n-1$  DMU's recebem menos, quando comparadas a distribuição proposta originalmente.

Para um ruído no output  $q$  de uma DMU  $k$ , o percentual do novo input que as DMU's sem ruído devem receber na distribuição para  $n$  DMU's com  $s$  outputs e  $m$  inputs é dado pela equação (27). A DMU  $k$ , com ruído no output  $q$ , receberá um percentual do novo input de acordo com a equação (28).

$$p'_j = \frac{\left( (2m) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2 + \left( \frac{y_{qj}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n y_{qj}} \right)^2}} \right)}{\left( \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2 + \left( \frac{y_{qj}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n y_{qj}} \right)^2}} + \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rk}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2 + \left( \frac{\delta_k + y_{qk}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n y_{qj}} \right)^2}} \right)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \cdot \frac{1}{m} \quad (31)$$

$$p'_k = \frac{\left( (2m) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rk}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2 + \left( \frac{\delta_k + y_{qk}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n y_{qj}} \right)^2}} \right)}{\left( \sum_{j=1}^n \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rj}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2 + \left( \frac{y_{qj}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n y_{qj}} \right)^2}} + \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^s \left( \frac{y_{rk}}{\sum_{j=1}^n y_{rj}} \right)^2 + \left( \frac{\delta_k + y_{qk}}{\delta_k + \sum_{j=1}^n y_{qj}} \right)^2}} \right)} \cdot \frac{\sum_{i=1}^m x_{ik}}{\sum_{j=1}^n x_{ij}} \cdot \frac{1}{m} \quad (32)$$

Observando os numeradores do primeiro termo da subtração entre parênteses das equações (31) e (32), pode-se verificar, caso  $\delta_k > 0$ , que a DMU  $k$  com ruído irá receber mais do novo input e as outras  $n-1$  DMU's receberão menos, quando comparadas com a distribuição sem ruído. Caso  $\delta_k < 0$ , a DMU  $k$  recebe menos do novo input e as outras  $n-1$  DMU's recebem mais do novo input. Provando que a propriedade da redistribuição coerente é válida tanto para ruído no input como no output.

## XI. CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

A distribuição de um novo input pelo MFEAj apresentou melhores resultados que o MFE, quando comparado com o modelo de Beasley. O MFEAj apresentou uma interessante propriedade de redistribuição coerente de um novo input que não foi observada nos outros modelos que foram estudados, além de manter a relevância do novo input frente ao conjunto de inputs de um problema.

Outras linhas de pesquisas, como sugestão para trabalhos futuros são: o aperfeiçoamento de Modelo de Fronteira Hiperbólica (MFH) de Avellar (2004), modelo que realiza a distribuição de um novo output de forma que todas as DMU's

fiquem sobre uma fronteira de eficiência hiperbólica; o estudo de outras formas de fronteiras para os modelos DEA paramétricos de distribuição de um novo input ou output; a aplicação de ponderações (restrições) nos pesos de acordo com o interesse do tomador de decisão; e a prova analítica de que o MFEAj realiza a distribuição de forma DEA CCR eficiente do novo input em partes ou integralmente.

**Soares de Mello, J.C.C.B.; Gomes, E.G.; Leta, F.R.; Soares de Mello, M.H.C.** Algoritmo de alocação de recursos discretos com análise de envoltória de dados. *Pesquisa Operacional*, v.26, n.2, p.225-239, 2006.

#### REFERÊNCIAS

- Angulo Meza, L.** Um enfoque multiobjetivo para a determinação de alvos na Análise Envoltória de Dados DEA), *Tese de Doutorado*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2002.
- Avellar, J.V.G.** Modelos DEA de soma constante de *inputs/outputs*. *Dissertação de Mestrado*, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2004.
- Avellar, J.V.G.; Milioni, A.Z.; Rabello, T.N.** Spherical frontier DEA model based on a constant sum of inputs. *Journal of the Operational Research Society*, 1-6, 2006.
- Athanassopoulos, A.D.** Goal programming & data envelopment analysis (GoDEA) for target-based multi-level planning: Allocating central grants to the Greek local authorities. *European Journal of Operational Research*, **87**, 535-550, 1995.
- Athanassopoulos, A.D.** Decision Support for Target-Based Resource Allocation of Public Services in Multiunit and Multilevel Systems. *Management Science*, 44(2), 173-187, 1998.
- Beasley, J.E.** Allocating fixed costs and resources via data envelopment analysis. *European Journal of Operational Research* 147, 198-216, 2003.
- Charnes, A.; Cooper, W.W.; Golany, B.; Seiford, L. & Stutz, J.** Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical production functions. *Journal of Econometrics*, **30**, 91-107, 1985.
- Cook, W.D.; Kress, M.** Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach. *European Journal of Operational Research* 119, 652-661, 1999.
- Cooper, W.W.; Seiford, L.M.; Tone, K.** *Data Envelopment Analysis: A comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA - Solver Software*. Kluwer Academic, Boston, 2000.
- EMS 1.3 - Efficiency Measurement System DEA software** – available at <http://www.wiso.uni-dortmund.de/lsg/or/scheel/ems/> . Acessado em 15/03/2007.
- Estellita Lins, M.P.; Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Soares de Mello, A.J.R.** Olympic ranking based on a Zero Sum Gains DEA model. *European Journal of Operational Research*, 148(2), 312-322, 2003.
- Farrel, M.J.; Fieldhouse, M.** Estimating efficient production functions under increasing returns to scale. *Journal of the Royal Statistical Society, Series A* , 252-267, 1962.
- Golany, B.; Phillips, F.Y. & Rousseau, J.J.** Models for improved effectiveness based on DEA efficiency results. *IIE Transactions*, **25**, 2-10, 1993.
- Gomes, E.G.** Modelos de Análise de Envoltória de Dados com Ganhos de Soma Zero. *Tese de Doutorado*, Programa de Engenharia de Produção, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.
- Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita Lins, M.P.** Busca seqüencial de alvos intermediários em modelos DEA com soma de *outputs* constante. *Investigação Operacional*, **23**(2), 163-178, 2003.
- Gomes, E.G.; Soares de Mello, J.C.C.B. & Estellita Lins, M.P.** Redistribuição de *inputs* e *outputs* em modelos de análise de envoltória de dados com ganhos de soma zero. *Pesquisa Operacional*, 24(2), 269-284, 2004.
- Guedes, E.C.C.** Modelos DEA de fronteira esférica ajustado, relatório parcial de dissertação de mestrado, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, ITA, São José dos Campos, SP, 2007.
- Koopmans, T.C.** Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium, on Mathematical Statistical and Probability*. John Wiley and Sons, New York, pp. 33-97, 1951.
- Kozyreff, E.; Milioni, A.Z.**, Um método para estimativas de metas DEA, *Revista Produção*, São Paulo, SP, vol 14, no. 02, 90-101, 2004.
- Soares de Mello, J.C.C.B.; Estellita Lins, M.P.; Gomes, E.G.** Estimativa de planos tangentes à fronteira DEA em DMU's extremo-eficientes. XXXIII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Campos do Jordão, SP – Brazil. 2001.
- Soares de Mello, J.C.C.B.; Estellita Lins, M.P.; Gomes, E.G.** Construction of a smoothed DEA frontier, *Pesquisa Operacional* v.22, n. 2, 183-201, 2002.

## ANEXO 1

**TABELA 3:** distribuição para DMU's com dados originais, para DMU's com ruído positivo no *input* 1 da DMU 7 e alterações.

DMU	Beasley			MFE			MFEAj		
	Dados originais A	Input Alt B	Alter B-A	Dados originais C	Input Alt D	Alter D-C	Dados originais E	Input Alt F	Alter F-E
1	6,78	6,76	-0,02	7,73	7,77	+0,04	6,74	7,05	+0,31
2	7,21	7,27	+0,06	7,76	7,76	0,00	7,79	8,05	+0,26
3	6,83	6,93	+0,10	7,54	7,66	+0,12	6,76	7,13	+0,37
4	8,47	8,47	0,00	7,94	7,93	-0,01	8,63	8,87	+0,24
5	7,08	7,22	+0,14	7,43	7,46	+0,03	8,11	8,38	+0,27
6	10,06	9,94	-0,12	10,56	10,52	-0,04	10,17	10,48	+0,31
7	5,09	5,24	+0,15	6,50	6,25	-0,25	4,37	1,04	-3,33
8	7,74	7,85	+0,11	8,18	8,15	-0,03	8,86	9,10	+0,24
9	15,11	14,90	-0,21	10,90	10,84	-0,06	14,38	14,66	+0,28
10	10,08	9,95	-0,13	9,93	9,98	+0,05	9,61	9,99	+0,38
11	1,58	1,56	-0,02	2,72	2,91	+0,19	0,41	0,69	+0,28
12	13,97	13,90	-0,07	12,81	12,77	-0,04	14,17	14,56	+0,39

**TABELA 4:** distribuição para DMU's com dados originais, para DMU's com ruído positivo no *output* 2 da DMU 12 e alterações.

DMU	Beasley			MFE			MFEAj		
	Dados Originais A	Output Alt B	Alter B-A	Dados Originais C	Output Alt D	Alter D-C	Dados Originais E	Output Alt F	Alter F-E
1	6,78	6,23	-0,55	7,73	7,32	-0,41	6,74	5,94	-0,80
2	7,21	6,79	-0,42	7,76	7,92	+0,16	7,79	7,21	-0,58
3	6,83	6,62	-0,21	7,54	7,82	+0,28	6,76	6,22	-0,54
4	8,47	7,59	-0,88	7,94	7,87	-0,07	8,63	7,96	-0,67
5	7,08	6,88	-0,20	7,43	8,06	+0,63	8,11	7,75	-0,36
6	10,06	8,58	-0,48	10,56	9,61	-0,95	10,17	8,97	-1,20
7	5,09	5,03	-0,06	6,50	7,03	+0,53	4,37	3,98	-0,39
8	7,74	7,52	-0,22	8,18	8,52	+0,34	8,86	8,32	-0,54
9	15,11	13,01	-2,10	10,90	9,70	-1,20	14,38	13,13	-1,25
10	10,08	9,11	-0,97	9,93	8,70	-1,23	9,61	8,36	-1,25
11	1,58	1,50	-0,08	2,72	2,35	-0,37	0,41	0,01	-0,40
12	13,97	21,14	+7,17	12,81	15,10	+2,29	14,17	22,15	+7,98