

Estudo sobre Reflexão e Refração de Ondas Eletromagnéticas em Interfaces Planas

Carla de Sousa Martins

Departamento de Microondas e Optoeletrônica – Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Praça Mal Eduardo Gomes nº 50, Jardim das Acácias – São José dos Campos – SP – Brasil

Resumo — Apresenta-se um estudo de revisão do problema clássico de refração de onda em uma interface plana e gráficos de contorno de campos vetoriais são esboçados de forma simples e direta. Estas figuras de campos, juntamente com um desenvolvimento matemático anterior, proporcionam uma visão clara da natureza física da onda.

Palavras-chaves — Leis de Snell, Refração de Onda, Reflexão de Onda.

I. INTRODUÇÃO

Esta publicação revisita o problema clássico de refração e reflexão de onda eletromagnética, com o auxílio da formulação apresentada em [1]. Sempre que possível, será mantida a nomenclatura adotada nessa referência.

O uso de uma rotina para esboçar gráficos de contorno, que requer um mínimo de programação, pode se tornar um recurso facilitador para o entendimento do problema de reflexão e refração de ondas, sob a enorme quantidade de exponenciais, coeficientes e operações vetoriais que conduzem às leis de Snell, conforme são ministradas nos cursos de graduação típicos sobre eletromagnetismo.

A contribuição singela deste artigo é um conjunto de figuras, na verdade instantes de tempo de linhas de campo no espaço, junto com uma receita simples para produzi-las. A visualização desses campos torna fácil a compreensão, mesmo por parte daqueles que já estudaram essas equações, do comportamento espaço-temporal de uma onda eletromagnética em uma interface plana.

Na solução do problema harmônico, os vários números de onda k são parâmetros naturais a usar, em contraste ao comprimento de onda e velocidade, pois a matemática subsequente é simplificada e todas as dimensões lineares são escalonadas por um k apropriado. Note que os vetores de onda são primordialmente escritos em termos de suas componentes cartesianas, sem a aparência explícita de funções seno e cosseno dos três ângulos (θ_i , θ_r , θ_t) em cada passo do desenvolvimento. Uma vantagem pedagógica desta notação é evitar a interpretação da forma $\cos\theta t$ como um número complexo no caso de reflexão interna total.

II. ANÁLISE: POLARIZAÇÃO PERPENDICULAR

A onda plana incidente da Fig. 1 é polarizada com o campo elétrico dirigido para fora da página, na direção \hat{y} , que é perpendicular ao plano x - z de incidência. A polarização paralela pode então ser tratada imediatamente por dualidade, em termos do campo magnético na direção \hat{y} . Os fasores complexos representam os sinais harmônicos em regime perma-

nente via, por exemplo,

$$\vec{E}(x, z, t) = \text{Re}[\vec{E}(x, z)e^{j\omega t}]. \quad (1)$$

O meio 1, com os parâmetros constitutivos (μ_1, ϵ_1) , ocupa o semi-espaço esquerdo ($z < 0$) e (μ_2, ϵ_2) caracteriza o meio 2 que ocupa o semi-espaço direito ($z > 0$). Os campos elétrico e magnético de uma onda plana são da forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad \vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2)$$

onde \vec{k} corresponde ao vetor de onda ou vetor de propagação, ou seja, vetor que determina a direção de propagação da onda. No caso geral, o vetor de onda é da forma

$$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z} \quad (3)$$

onde k_x , k_y e k_z são constantes. O módulo de \vec{k} corresponde ao número de onda, isto é,

$$|\vec{k}| = \omega \sqrt{\mu\epsilon}. \quad (4)$$

O vetor \vec{r} corresponde ao vetor posição

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (5)$$

e o vetor \vec{E}_0 corresponde ao vetor amplitude

$$\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y} + E_{0z}\hat{z}. \quad (6)$$

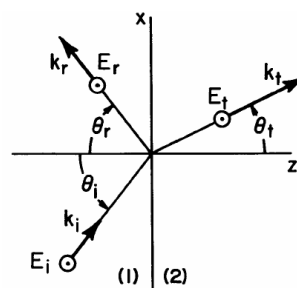


Fig. 1 – Representação de onda plana em uma interface plana

As equações de Maxwell aplicáveis a esses campos são simplificadas se forem utilizadas as seguintes formas algébricas

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r})}{\omega\mu} & \vec{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) &= 0 \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -\frac{\vec{k} \times \vec{H}(\vec{r})}{\omega\epsilon} & \vec{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Da verificação de (7), percebe-se que $\vec{E}(\vec{r})$ é perpendicular ao plano formado pelo vetor $\vec{H}(\vec{r})$ e \vec{k} . Das expressões dos divergentes, vê-se também que $\vec{E}(\vec{r})$ e $\vec{H}(\vec{r})$ são perpendiculares a \vec{k} , significando que $\vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H}(\vec{r})$ e \vec{k} são perpendiculares entre si, o que caracteriza uma onda plana transversal eletromagnética (TEM – “*Transverse Electric and Magnetic*”).

Retornando ao estudo da polarização perpendicular, e introduzindo os índices i (incidente), r (refletida) e t (transmitida), as expressões gerais para as ondas incidente, refletida e transmitida são

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_i(x, z) &= \hat{y}E_{0i}e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = \hat{y}E_{0i}e^{-jk_{ix}x}e^{-jk_{iz}z} \\ \vec{H}_i(x, z) &= \frac{\vec{k}_i \times \vec{E}_i}{\omega\mu_1} = (\hat{z}k_{ix} - \hat{x}k_{iz}) \frac{E_{0i}}{\omega\mu_1} e^{-jk_{ix}x}e^{-jk_{iz}z} \end{aligned} \right\} (z < 0) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_r(x, z) &= \hat{y}E_{0r}e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \hat{y}E_{0r}e^{-jk_{rx}x}e^{-jk_{rz}z} \\ \vec{H}_r(x, z) &= \frac{\vec{k}_r \times \vec{E}_r}{\omega\mu_1} = (\hat{z}k_{rx} - \hat{x}k_{rz}) \frac{E_{0r}}{\omega\mu_1} e^{-jk_{rx}x}e^{-jk_{rz}z} \end{aligned} \right\} (z < 0) \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_t(x, z) &= \hat{y}E_{0t}e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} = \hat{y}E_{0t}e^{-jk_{tx}x}e^{-jk_{tz}z} \\ \vec{H}_t(x, z) &= \frac{\vec{k}_t \times \vec{E}_t}{\omega\mu_2} = (\hat{z}k_{tx} - \hat{x}k_{tz}) \frac{E_{0t}}{\omega\mu_2} e^{-jk_{tx}x}e^{-jk_{tz}z} \end{aligned} \right\} (z > 0) \quad (10)$$

As componentes cartesianas dos três vetores de onda são

$$\left. \begin{aligned} \vec{k}_i &= \hat{x}k_{ix} + \hat{z}k_{iz} \\ \vec{k}_r &= \hat{x}k_{rx} + \hat{z}k_{rz} \\ \vec{k}_t &= \hat{x}k_{tx} + \hat{z}k_{tz} \end{aligned} \right\} (11)$$

e cada um deles deve representar uma onda legítima em seu domínio, ou seja,

$$|\vec{k}_i| = |\vec{k}_r| = k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} \quad \text{e} \quad |\vec{k}_t| = k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2} \quad (12)$$

Geometricamente, as componentes cartesianas podem ser expressas em termos dos três ângulos medidos a partir da interface normal (θ_i , θ_r e θ_t), conforme demonstra a Fig. 1.

$$\left. \begin{aligned} k_{ix} &= k_1 \sin \theta_i, & k_{iz} &= k_1 \cos \theta_i \\ k_{rx} &= k_1 \sin \theta_r, & k_{rz} &= -k_1 \cos \theta_r \\ k_{tx} &= k_2 \sin \theta_t, & k_{tz} &= k_2 \cos \theta_t \end{aligned} \right\} (13)$$

onde esta interpretação de \vec{k}_t depende da formação de fato de uma onda se propagando no meio 2.

Introduzindo os coeficientes de reflexão e transmissão de Fresnel, respectivamente,

$$\Gamma_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad \text{e} \quad T_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \quad (14)$$

e impondo a continuidade dos campos elétrico e magnético tangenciais à interface $z = 0$, tem-se, respectivamente,

$$\left. \begin{aligned} e^{-jk_{ix}x} + \Gamma_{\perp} e^{-jk_{rx}x} &= T_{\perp} e^{-jk_{tx}x} \\ e^{-jk_{iz}x} + \frac{k_{rz}}{k_{iz}} \Gamma_{\perp} e^{-jk_{rz}x} &= \frac{\mu_1 k_{tz}}{\mu_2 k_{iz}} T_{\perp} e^{-jk_{tz}x} \end{aligned} \right\} (-\infty < x < \infty). \quad (15)$$

A observação mais apurada de (15) mostra que, para que estas condições de contorno sejam válidas para todo x , é necessário que o comportamento em x de todos os campos seja igual ao da onda incidente. Em outras palavras, para que haja continuidade das componentes tangenciais à interface $z = 0$ para todo x , os campos existentes nos lados adjacentes à interface devem exibir a mesma variação com x , isto é,

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} \quad (16)$$

comumente conhecido como casamento de fase (“*phase matching*”).

A partir da interpretação geométrica da aplicação da condição (16) em (13), surgem imediatamente as leis de reflexão e refração de Snell:

$$\left. \begin{aligned} k_{ix} &= k_{rx} & k_{ix} &= k_{tx} \\ k_1 \sin \theta_i &= k_1 \sin \theta_r & k_1 \sin \theta_i &= k_2 \sin \theta_t \\ \theta_i &= \theta_r & \sin \theta_t &= \frac{\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}}{\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}} \sin \theta_i \end{aligned} \right\}$$

Definindo o índice de refração do meio 1 como $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}\mu_{r1}}$ e do meio 2 como $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}\mu_{r2}}$, onde $\epsilon_{r1} = \epsilon_1/\epsilon_0$, $\mu_{r1} = \mu_1/\mu_0$, $\epsilon_{r2} = \epsilon_2/\epsilon_0$ e $\mu_{r2} = \mu_2/\mu_0$ correspondem às permissividades e permeabilidades relativas do meio 1 e do meio 2, respectivamente, pode-se escrever as leis de reflexão e refração de Snell como

$$\theta_i = \theta_r \quad \text{e} \quad \sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad (17)$$

Duas situações físicas distintas devem ser consideradas:

(1) $k_2 > k_{ix}$, isto é, $n_2/n_1 > \sin \theta_i$.

Neste caso, $k_{tz}^2 = k_2^2 - k_{tx}^2 \Rightarrow k_{tz} = +\sqrt{k_2^2 - k_{tx}^2}$ ou $k_{tz} = +\sqrt{k_2^2 - k_{ix}^2}$, o meio 2 é mais refringente que o meio 1. Logo, k_{tz} é um número real positivo, e o campo na região 2 é uma onda plana propagante

$$(E_t(x, z), H_t(x, z)) \sim e^{-jk_{ix}x} e^{-jk_{tz}z}. \quad (18)$$

(2) $k_2 < k_{ix}$, isto é, $n_2/n_1 < \sin \theta_i$.

Neste caso, $k_{tz} = -\sqrt{k_2^2 - k_{ix}^2}$ ou $k_{tz} = -j\sqrt{k_{ix}^2 - k_2^2} = -j\alpha$, com α real e positivo, e o meio 1 é mais refringente que o meio 2. Logo, o campo na região 2 é evanescente

$$(E_t(x, z), H_t(x, z)) \sim e^{-jk_{ix}x} e^{-\alpha z}. \quad (19)$$

O valor de θ_i tal que $\sin \theta_i = n_2/n_1$ é chamado de ângulo crítico θ_c ,

$$\theta_c = \sin^{-1} \frac{n_2}{n_1}. \quad (20)$$

A Fig. 2 mostra claramente, e sem algebrismo, a relação entre o vetor de onda incidente e o vetor de onda que é transmitido em um meio menos refringente. À medida que o ângulo incidente se aproxima do ângulo crítico, o início da onda superficial (19) em $\theta_i = \pi/2$ é evidente.

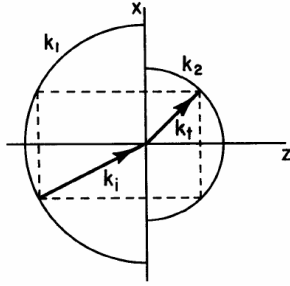


Fig. 2 – Casamento de fase dos números de onda tangenciais; caso em que $k_1 > k_2$.

Após cancelar os fatores exponenciais em comum, as expressões em (15) podem ser resolvidas a fim de obter os coeficientes de Fresnel:

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\mu_2 k_{iz} - \mu_1 k_{iz}}{\mu_2 k_{iz} + \mu_1 k_{iz}} \quad \text{e} \quad T_{\perp} = \frac{2\mu_2 k_{iz}}{\mu_2 k_{iz} + \mu_1 k_{iz}}. \quad (21)$$

Note que se $n_1 > n_2$ e se $\theta_i > \theta_c$ então $\sin\theta_i > n_2/n_1$. Logo, pela lei de refração de Snell,

$$\sin\theta_i = \frac{n_1}{n_2} \sin\theta_i > 1$$

o que corresponde à situação (2) apresentada anteriormente, na qual $k_{iz} = -j\alpha$, isto é, a onda no meio 2 é evanescente. O módulo do coeficiente de reflexão neste caso é igual a

$$|\Gamma_{\perp}| = \left| \frac{\mu_2 k_{iz} + j\alpha}{\mu_2 k_{iz} - j\alpha} \right| = 1 \quad (22)$$

o que significa que toda a potência da onda incidente é refletida, ocorrendo assim reflexão interna total no meio 1, situação que ocorre quando o ângulo de incidência é maior que o ângulo crítico.

Outro caso limite, a ausência total de onda refletida, ocorre para um ângulo de incidência especial chamado ângulo de Brewster para polarização perpendicular, obtido fazendo o numerador de Γ_{\perp} em (21) igual a zero,

$$\theta_{B\perp} = \sin^{-1} \left[\left(\frac{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}}{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (23)$$

Excetuando o expoente $1/2$, o resultado acima concorda com o apresentado em [1].

A densidade de fluxo de potência é representada pelo vetor de Poynting complexo $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$, que na região 1 exibe um comportamento de onda estacionária normal à interface.

A partir de (8) e (9), pode-se escrever as expressões para o campo elétrico total e campo magnético total do meio 1 da forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_{meio1}(x, z) &= \vec{E}_i(x, z) + \Gamma_{\perp} \vec{E}_r(x, z) \\ \vec{H}_{meio1}(x, z) &= \vec{H}_i(x, z) + \Gamma_{\perp} \vec{H}_r(x, z) \end{aligned} \quad (24)$$

Após algumas manipulações matemáticas em (24) obtém-se, para a densidade de fluxo de potência do meio 1,

$$\begin{aligned} \vec{S}_1(x, z) &= \frac{|E_{0i}|^2}{\omega\mu_1} \left\{ \hat{x} k_{ix} \cdot \left| e^{-jk_{iz}z} + \Gamma_{\perp} e^{+jk_{iz}z} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \hat{z} k_{iz} \cdot \left[1 - |\Gamma_{\perp}|^2 + 2j \text{Im}(\Gamma_{\perp} e^{+2jk_{iz}z}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

Na região 2, a estrutura do vetor de Poynting complexo depende da natureza propagante ou evanescente da onda transmitida, assim, distinguem-se duas situações:

Situação 1 – $k_2 > k_{ix}$

Neste caso, a partir das equações (10) e (16), pode-se escrever o campo elétrico e o campo magnético do meio 2 na forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, z) &= \hat{y} T_{\perp} E_{0i} e^{-jk_{ix}x} e^{-jk_{iz}z} \\ \vec{H}_t(x, z) &= (\hat{z} k_{ix} - \hat{x} k_{iz}) \frac{T_{\perp} E_{0i}}{\omega\mu_2} e^{-jk_{ix}x} e^{-jk_{iz}z} \end{aligned} \quad (26)$$

Situação 2 – $k_2 < k_{ix}$

Neste caso, a partir das equações (10), (16) e (19), pode-se escrever o campo elétrico e o campo magnético do meio 2 na forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x, z) &= \hat{y} T_{\perp} E_{0i} e^{-jk_{ix}x} e^{-\alpha z} \\ \vec{H}_t(x, z) &= (\hat{z} k_{ix} + \hat{x} j\alpha) \frac{T_{\perp} E_{0i}}{\omega\mu_2} e^{-jk_{ix}x} e^{-\alpha z} \end{aligned} \quad (27)$$

Após os algebrismos necessários de (26) e (27), obtém-se, para a densidade de fluxo de potência do meio 2,

$$\vec{S}_2(x, z) = \frac{|E_{0i}|^2 |T_{\perp}|^2}{\omega\mu_2} \begin{cases} [\hat{x} k_{ix} + \hat{z} k_{iz}]; & \text{para } k_2 > k_{ix} \\ [\hat{x} k_{ix} - \hat{z} j\alpha] e^{-2\alpha z}; & \text{para } k_2 < k_{ix} \end{cases} \quad (28)$$

Note que (28) mostra explicitamente o decaimento exponencial no meio 2, no caso de onda evanescente, que não carrega potência na direção normal à interface, visto que a componente em \hat{z} é imaginária. Neste ponto, talvez alguém pudesse interpretar este resultado como a inexistência de campos no meio 2, o que absolutamente não é verdade. De (27), verifica-se que, para a situação de reflexão interna total, os campos eletromagnéticos no meio 2 decaem exponencialmente ao longo da direção \hat{z} (são multiplicados por um fator $e^{-\alpha z}$), e à medida que $z \rightarrow \infty$, os campos tendem a se anularem.

III. LINHAS DE CAMPO VETORIAIS INSTANTÂNEAS A PARTIR DE CONTORNOS ESCALARES

No domínio bidimensional da Fig. 1 (plano x - z), associado à intensidade de campo elétrico na direção \hat{y} ($E_y(x, z)$) está a intensidade do campo magnético $\vec{H}(x, z)$, que pode ser obtida

através da aplicação direta das equações de Maxwell. Logo,

$$\vec{H}(x, z) = -\frac{\nabla \times [\hat{y}E_y(x, z)]}{j\omega\mu}$$

Relembrando a seguinte identidade vetorial,

$$\nabla \times (\phi \vec{A}) = \nabla \phi \times \vec{A} + \phi \nabla \times \vec{A}$$

onde ϕ representa um escalar e \vec{A} representa um vetor, pode-se reescrever a expressão para a intensidade de campo magnético $\vec{H}(x, z)$ como

$$\vec{H}(x, z) = -\frac{\nabla \times [\hat{y}E_y(x, z)]}{j\omega\mu} = -\frac{\nabla E_y(x, z) \times \hat{y} + E_y(x, z) \nabla \times \hat{y}}{j\omega\mu}.$$

Percebe-se claramente que $\nabla \times \hat{y} = 0$, logo

$$\vec{H}(x, z) = -\frac{\nabla \times [\hat{y}E_y(x, z)]}{j\omega\mu} = +\frac{1}{j\omega\mu} \hat{y} \times \nabla E_y(x, z). \quad (29)$$

O gradiente de $E_y(x, z; t)$ é um campo vetorial no plano x - z , que é ortogonal aos contornos de $E_y(x, z; t)$ e igual a uma constante, ou seja, $\nabla E_y(x, z; t)$ é ortogonal à superfície definida por $E_y(x, z; t) = c$, onde c é uma constante. Ao fazer o produto vetorial $\hat{y} \times \nabla E_y(x, z; t)$, obtém-se um campo vetorial instantâneo tangente aos contornos de $E_y(x, z; t)$, em qualquer ponto. A magnitude deste novo campo vetorial é igual à magnitude de $|\nabla E_y(x, z; t)|$ e, conseqüentemente, os contornos de $E_y(x, z; t) = c$ são automaticamente a figura do campo $\hat{y} \times \nabla E_y(x, z; t)$, onde a densidade de contornos é proporcional à força do campo.

A figura da variação espacial do vetor campo magnético $\vec{H}(x, z; t)$, em qualquer instante de tempo t , é gerada pelos contornos de valores constantes da parte real da função escalar

$$\text{Re} \left\{ \frac{E_y(x, z)}{j\omega\mu} e^{j\omega t} \right\}.$$

O fator constante $\omega\mu$ é de menor conseqüência aqui, enquanto que, em vista de (1), a inclusão do fator j tem o efeito de manter a referência de fase $\cos \omega t$ da onda incidente na origem das coordenadas $(x, z) = (0, 0)$.

IV. RESULTADOS E INTERPRETAÇÃO FÍSICA

A Fig. 3(a)-(c) mostra as linhas de campo magnético instantâneas no tempo (normalizado) $\omega t = 0$, resultantes de uma onda perpendicularmente polarizada que incide sob um ângulo $\theta_i = 45^\circ$, passando do ar para o semi-espço dielétrico ($z \geq 0$) tendo $\epsilon_{r2} = 1.1, 2.0$ e 20.0 , respectivamente. À medida que t aumenta, todas essas linhas de campo se propagam na direção $+x$, tangente à interface, com velocidade de fase igual a ω/k_{ix} . Em todos os três gráficos da Fig. 3, o campo transmitido (lado direito do domínio) é uma onda plana singela se propagando com ângulos θ_t cada vez menores. As linhas de campo magnético da onda estacionária à esquerda da interface ora formam círculos fechados ora estendem-se até infinito.

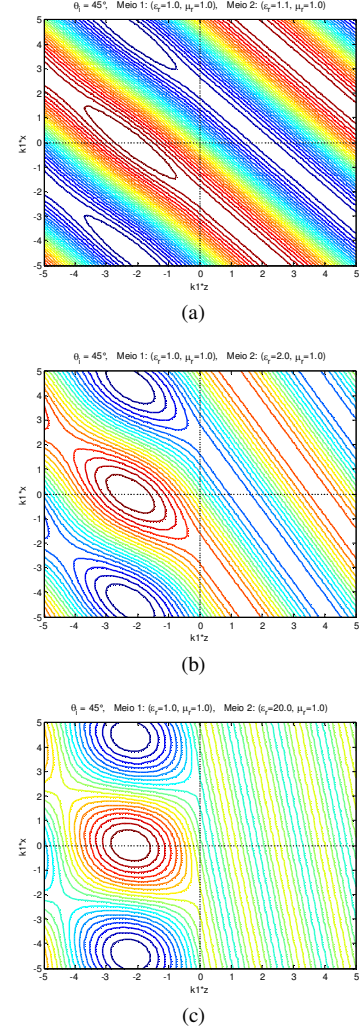


Fig. 3 – Linhas de campo magnético instantâneas no domínio $(-5 \leq k_{1x}, k_{1z} \leq 5)$: Caso: $\theta_i = 45^\circ$, $\omega t = 0$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \epsilon_{r1} = 1$.
(a) $\epsilon_{r2} = 1.1$. (b) $\epsilon_{r2} = 2.0$. (c) $\epsilon_{r2} = 20.0$.

Tais campos são chamados de solenoidais. Através do princípio da dualidade, citada no começo da Seção II, que requer um intercâmbio entre μ e ϵ e entre \vec{E} e \vec{H} , essas figuras também são as linhas de campo elétrico para o caso dual de polarização paralela. O valor relativamente pequeno de $\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}$ da Fig. 3(a) resulta numa pequena taxa de onda estacionária no meio 1, enquanto que a descontinuidade mais acentuada da Fig. 3(c) produz uma reflexão maior, criando assim um padrão gráfico de onda estacionária mais substancial via interferências construtivas e destrutivas entre a onda incidente e a refletida.

A situação de uma onda plana incidindo de um meio mais denso ($\epsilon_{r1} = 2, \mu_{r1} = 1$) para um meio menos denso ($\epsilon_{r2} = \mu_{r2} = 1$) é mostrada na Fig. 4, onde o ângulo crítico $\theta_c = 45^\circ$. A Fig. 4(a) mostra o caso de incidência sob ângulo crítico, onde se percebe que não existe variação com a coordenada z no meio 2. À medida que o ângulo de incidência se torna maior que o ângulo crítico, de $\theta_i = 50^\circ$ [Fig. 4(b)] até $\theta_i = 80^\circ$ [Fig. 4(c)], a onda superficial no meio 2 se torna cada vez mais próxima da interface. Isto se deve devido ao comportamento evanescente da onda transmitida na direção z que, quanto maior for θ_i maior será o valor de α em (19).

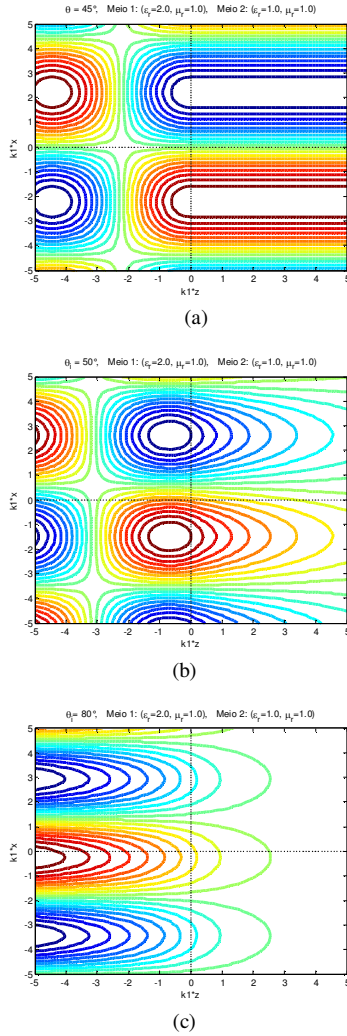


Fig. 4 – Linhas de campo magnético instantâneas no domínio $(-5 \leq k_1x, k_1z \leq 5)$; Caso: $\omega t = 0$, $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$. (a) $\theta_i = 45^\circ$. (b) $\theta_i = 50^\circ$. (c) $\theta_i = 80^\circ$.

A Fig. 5 apresenta uma visualização tridimensional para a situação representada na Fig. 3(b), ou seja, onda perpendicularmente polarizada que incide sob um ângulo $\theta_i = 45^\circ$, passando do ar para o semi-espaço dielétrico ($z \geq 0$) tendo $\epsilon_{r2} = 20.0$.

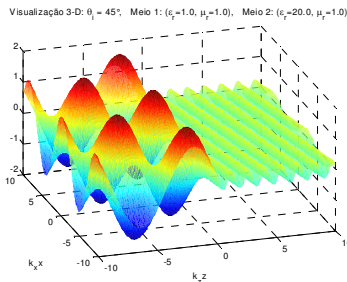


Fig. 5 – Visualização 3D das linhas de campo magnético instantâneas no domínio $(-10 \leq k_1x, k_1z \leq 10)$; Caso: $\theta_i = 45^\circ$, $\omega t = 0$, $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \epsilon_{r1} = 1$ e $\epsilon_{r2} = 20.0$.

A Fig. 6 apresenta uma visualização tridimensional para a situação representada na Fig. 4(c), ou seja, uma onda plana incidindo de um meio mais denso ($\epsilon_{r1} = 2$, $\mu_{r1} = 1$) para um meio menos denso ($\epsilon_{r2} = \mu_{r2} = 1$), com ângulo de incidência maior que o ângulo crítico ($\theta_i = 80^\circ$ e $\theta_c = 45^\circ$).

A Fig. 7 apresenta o *script* da função “PERP” utilizada para a geração dos gráficos, na linguagem do software MATLAB.

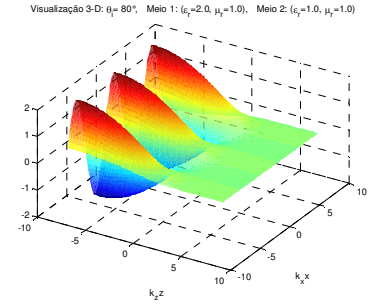


Fig. 6 – Visualização 3D das linhas de campo magnético instantâneas no domínio $(-10 \leq k_1x, k_1z \leq 10)$; Caso: $\omega t = 0$, $\epsilon_{r1} = 2$, $\epsilon_{r2} = \mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ e $\theta_i = 80^\circ$.

```

Function [ey]=perp(xi,zeta,tinc,e1,e2,u1,u2)
% Função PERP
% Referência: SCHARSTEIN, R. W. "Visualization and Interpretation for the Electromag
% netic Derivation of Snell's Laws". IEEE Transactions on Education. Vol. 41. n° 4. 1998.
%
% Sintaxe: [Ey]=PERP(xi,zeta,tinc,e1,e2,u1,u2)
%
% Onda plana obliquamente incidente em uma interface dielétrica plana. Polar. Perpend.
%
% Entradas:          xi = K1*x (n° de onda do meio 1 * coordenada x)
%                   zeta = K1*z (n° de onda do meio 1 * coordenada z)
%                   tinc = ângulo de incidência em graus
%                   e1 = constante dielétrica do meio 1
%                   e2 = constante dielétrica do meio 2
%                   u1 = permeabilidade relativa do meio 1
%                   u2 = permeabilidade relativa do meio 2
%
% Saída:            Ey = Fator do campo elétrico em (xi,zeta)
tinc=tinc*pi/180; % transformando o ângulo de incidência para radianos
stinc=sin(tinc); ctinc=cos(tinc); % seno e co-seno do ângulo de incidência
m21=sqrt((e2*u2)/(e1*u1)); % razão n2/n1 – índices de refração
kixx=xi.*stinc; kizz=zeta.*ctinc; % componentes cartesianas do vetor de onda incidente

if stinc <= m21 % teste para qualquer fenômeno de ângulo crítico
    ktzk2=sqrt(1-(stinc/m21)^2);
else % razão ktzk2 (= cos(âng. De trans.) se a onda for propagante)
    ktzk2=-i*sqrt(1-(m21/stinc)^2);
end
ktzz=zeta.*ktzk2/m21; % ktz*z
refl=(u2*ctinc-u1*m21*ktzk2)/(u2*ctinc+u1*m21*ktzk2); % coeficientes de reflexão e
tran=2*u2*ctinc/(u2*ctinc+u1*m21*ktzk2); % transmissão de Fresnel
for l=1:1:size(xi,1)
    for m=1:1:size(xi,2)
        if zeta(l,m) <= 0
            ey(l,m) = exp(-kizz(l,m)*i)+refl*exp(kizz(l,m)*i);
        else
            ey(l,m) = tran*exp(-ktzz(l,m)*i);
        end
        ey(l,m)=ey(l,m)*exp(-kixx(l,m)*i);
    end
end
end

```

Fig. 7 – Script da função “PERP”.

V. OBSERVAÇÕES FINAIS

Algumas simplificações na abordagem do fenômeno de reflexão e refração de ondas planas, que facilitam a compreensão física e matemática do fenômeno, foram apresentadas. Uma delas é a abordagem da situação de reflexão interna total sem falar sobre o valor da função co-seno como um número imaginário. A outra simplificação está na forma de apresentação gráfica, na qual os gráficos são apresentados em função das variáveis adimensionais (k_{1x}, k_{1z}) ao invés das coordenadas originais (x, z) . Conseqüentemente, o valor absoluto da frequência ω não é necessário, e os parâmetros independentes das funções passam a ser o ângulo de incidência θ_i e os parâmetros constitutivos ϵ_{r1} , ϵ_{r2} , μ_{r1} e μ_{r2} apenas. Os resultados obtidos concordam com a referência [1].

REFERÊNCIAS

- [1] R. W. Scharstein, “Visualization and Interpretation for the Electromagnetic Derivation of Snell’s Laws”, *IEEE Transactions on Education*, vol. 41, N° 4, pp. 286-292, November 1998.
- [2] R. E. Collin, “Foundations for Microwave Engineering”, 2. ed, New York: McGraw-Hill, 1992.
- [3] S. Ramo, “Fields and waves in communication electronics”, New York: Wiley, 1994.