Determinação da Eficiência Global de uma Metralhadora através da Técnica de Monte Carlo

Filipe Rodrigues de Souza Moreira[1], Paulo Cesar Miscow Ferreira[2], Wilson José Vieira[3]
[1]Instituto Tecnológico de Aeronáutica - Praça Marechal Eduardo Gomes, 50 Vila das Acácias. São José dos Campos, 12228-900. S. Paulo, Brasil.
[2]Instituto de Aeronáutica e Espaço, CTA. [3]Instituto de Estudos Avançados, CTA.

***Resumo* — Esse artigo tem como finalidade o cálculo da Probabilidade de Acertos (PA) de tiros disparados de uma metralhadora. Trata-se de uma metralhadora que dispara projeteis contra um alvo retangular de dimensões conhecidas. Esses disparos têm uma distribuição uniforme, porém os erros desses disparos obedecem a uma distribuição normal. Está sendo considerado um fator chamado Erro Circular Provável (ECP) que se trata de uma região circular, com centro no ponto de mira da metralhadora que traz uma probabilidade de 50% de acerto de tiros em seu interior. Foi feita uma rotina em MatLab que calcula, através de simulação Monte Carlo a PA. Os resultados foram comparados com o MMA 136-1 (Manual de Seleção de Armamento_01/09/1980).**

***Palavras-chaves* — Monte Carlo, ECP, Probabilidade de Acertos.**

I. INTRODUÇÃO

É importante que ao se fazer uma aquisição, ou ao se optar pelo uso de um determinado armamento se conheça a eficiência do artefato. Em geral esse parâmetro é estatístico o que se necessita da observação de um grande número de histórias para gerá-lo. O trabalho em questão mostra que é possível gerar esse resultado através de simulação Monte Carlo. Uma vez se conhecendo as dimensões do alvo e o Erro Circular Provável do armamento se pode gerar um programa que calcula a probabilidade de acerto médio, quando se trata de um número grande de eventos.

A técnica de Monte Carlo é útil e simplificadora quando se trata de problemas em que esteja evidente total ou parcialmente o caráter aleatório. A idéia é que se repita o evento muitas vezes, através do uso de números aleatórios e se contem quantos estão relacionados com o sucesso do evento. A probabilidade de sucesso do evento será a simples razão entre a quantidade de vezes que ocorreram sucesso pela quantidade de eventos tomados.

A luz desse contexto se pode dizer que o local de chegada do projétil tem de certa forma, um caráter aleatório, visto que qualquer perturbação no conjunto Metralhadora e sua interface acarreta em mudança de direção do tiro e isso ocasiona em um erro.

Para considerar essas perturbações é necessário, assim, incluir aleatoriedade no problema para que a simulação seja o mais fiel possível da realidade. Para calcular a eficiência do armamento será aplicado diretamente um princípio básico do Método Monte Carlo.

Filipe Rodrigues de Souza Moreira, filipersmoreira@yahoo.com.br, Tel +55-12-97416254, Paulo César Miscow Ferreira, miscow@iae.cta.br, Tel +55-12-39474712, Wilson José Vieira, wjvieira@ieav.cta.br, Tel +55-12-39475478

Esse princípio chamado Técnica da Rejeição é realizado com a geração de um número apropriado de amostras, através da amostragem das funções que governam o fenômeno, utilizando números aleatórios. As amostras são testadas para saber se satisfazem uma condição de interesse e nesse caso serão contabilizadas como sucessos. Caso contrário a amostra é rejeitada. O resultado é calculado na forma de freqüência ou probabilidade de ocorrência do evento de interesse.

Para o cálculo da eficiência da metralhadora por Monte Carlo, são dados muitos tiros e contados aqueles que obtiveram sucesso, isto é, que atingiram o alvo. Esse será o evento em análise. Com isso, essa será uma maneira de se obter a eficiência, pois se conhecerá a quantidade de tiros que serão aproveitados dentro do espaço amostral dos tiros que foram efetuados.

II. FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

É conhecido um alvo retangular de dimensões 300 ft de largura e 2000 ft de altura. A metralhadora vai atirar uniformemente dentro da região limitada pelas dimensões dadas, ou seja, cada ponto do interior do retângulo receberá a mesma quantidade de tiros. Outro dado importante é o Erro Circular Provável (ECP) que também é conhecido e vale 200 ft. O ECP é exatamente o raio de um círculo com centro no ponto de mira da metralhadora, em que se sabe que 50% dos tiros apontados para esse centro vão acertar o círculo. O erro está normalmente distribuído e assim, é possível calcular a relação do ECP com o desvio padrão dessa distribuição. Trata-se de um problema bidimensional em que o desvio padrão da coordenada x é absolutamente independente da mesma grandeza para a coordenada y. Para esse trabalho se assumirá que esses dois desvios padrões têm valores iguais. Dadas as hipóteses de independência entre as variáveis normalmente distribuídas x e y, além da igualdade entre os seus respectivos desvios padrões se tem que a magnitude do vetor (x,y) dada por $z=\sqrt{x^2+y^2}$ possui uma distribuição denominada Rayleigh que possui função de distribuição de probabilidade dada por:

$$f(z)=\frac{z}{\sigma^2}e^{-0.5\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} \qquad (1)$$

Obviamente o domínio da função *f*(*z*) é dado pelo conjunto dos reais não negativos. Dessa forma, a função densidade acumulada para essa distribuição é dada por:

$$F(z) = \int_0^z \frac{z}{\sigma^2} e^{-0.5\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} dz = 1 - e^{-0.5\left(\frac{z}{\sigma}\right)^2} \quad (2)$$

A equação (2) mostra um importante resultado que é expresso por:

$$P(z \le a) = F(a) = 1 - e^{-0.5\left(\frac{a}{\sigma}\right)^2} \quad (3)$$

Aplicando esse resultado ao problema, se tem que $z \le ECP$ e dessa forma, a equação (3) fica tida como:

$$F(ECP) = 1 - e^{-0.5\left(\frac{ECP}{\sigma}\right)^2} \quad (4)$$

Tomando uma relação linear entre o ECP e o desvio padrão se pode escrever que:

$$ECP = K\sigma \quad (5)$$

Combinando (4) e (5) se obtêm uma relação direta entre a constante de proporcionalidade *K* e o valor da probabilidade.

$$P(K) = 1 - e^{-\frac{K^2}{2}} \quad (6)$$

Explicitando K na equação (6) se chega a:

$$K = \sqrt{-2\ln(1 - P(K))} \quad (7)$$

Aplicando a definição de ECP em que $P(K) = 0,5$ e através de (7) se obtém o valor de $K \cong 1{,}1774$. Com esse parâmetro bem determinado fica possível a implementação de um programa que calcula a probabilidade requerida. Como por exemplo:

```
B=300,H=2000,sig=200/1.1774;
p=0;n=10000
      for j=1:n
       yA=-H/2+rand(1)*H;
       xA=-B/2+rand(1)*B;
       yC=normrnd(yA,sig);
       xC=normrnd(xA,sig);
            if (yC<=H/2 && yC>=-H/2 && xC<=B/2 &&
            xC>=-B/2)
            p=p+1;
            end
      end
PA=p/n
s2s=(PA*(1-PA))/n; sds=sqrt(s2s)
```

O programa acima fornece como resultado, em uma rodada com 10000 amostras, o valor PA=0,5269±0,0050. O programa em questão atribui um sistema de eixos cartesianos com origem coincidente com o centro geométrico do retângulo.

III. ROTINA CONSIDERADA

No entanto, uma grande vantagem da utilização da metodologia Monte Carlo é a possibilidade de análises mais detalhadas. Por exemplo, para poder inferir danos em diferentes regiões do alvo, pode-se fazer uma discretização da região interna e limitante do retângulo de modo a percorrer cada região dessa grade. A análise pode ser feita considerando que a metralhadora vai atirar direcionada a cada uma das regiões e fazendo-se o estudo se o retângulo foi ou não atingido. Serão dados vários tiros para cada ponto de mira e contabilizado quantos obtiveram sucesso. No final a PA será aproximadamente igual à razão de sucessos pelo total de eventos.

A rotina usada para o cálculo da PA é simples e também pode ser detalhada aqui. Cada ponto da grade criada é considerado como posição de mira (x_A, y_A). Com as coordenadas do ponto de mira e com o valor do desvio padrão da amostra gera-se um novo ponto com coordenadas aleatórias normalmente distribuídas. Faz-se a verificação para saber se o ponto gerado está dentro ou fora do retângulo contabilizando assim os casos de sucesso. Esse procedimento é feito várias vezes para cada ponto. Quando o último ponto da malha for usado com mira da metralhadora se faz a contagem de quantos tiros foram dados em todo o processo e a quantidade de acertos. A razão desses dois parâmetros resulta no valor da PA. A rotina, em sua íntegra se encontra abaixo:

```
B=300,H=2000,sig=200/1.1774;
p=0;n=10000
for a=-B/2:10:B/2
      for b=-H/2:10:H/2
            yA=b;
            xA=a;
            for j=1:100
                  yC=normrnd(yA,sig);
                  xC=normrnd(xA,sig);
                  if (yC<=H/2 && yC>=-H/2 && xC<=B/2
            && xC>=-B/2)
                     p=p+1;
                     resultado2=[resultado2;xA yA];
                  else
                     resultado=[resultado;xC yC];
                  end
                  k=k+1;
            end
      end
end
PA=p/k
s2s=(PA*(1-PA))/k; sds=sqrt(s2s)
```

No programa colocado acima "sig" representa o valor do desvio padrão que é diretamente relacionado com o ECP, conforme (5).

IV. RESULTADOS

O programa desenvolvido mostra o valor numérico da razão p/k e para os dados considerados como entrada do problema a PA foi igual a 0,5234±0,0006, porém com $6x10^5$ amostras. A continuação desse programa é uma rotina que permite visualizar o alvo e a posição em que os tiros atingiram. Foi associado um símbolo "+", na cor vermelha, para os tiros que acertaram a região fora do alvo e ".", na cor azul, para os tiros que acertaram o interior do retângulo alvo. A Fig. 1 mostra o resultado dessa simulação considerando o alvo com as dimensões dadas acima e um ECP de 200 ft.

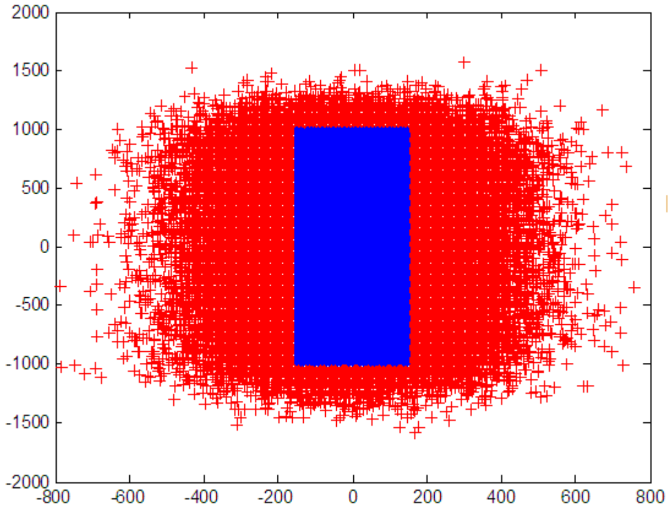

Fig. 1 – Visualização do alvo e anteparo após a simulação Monte Carlo

O **MMA 136-1 (Manual de Seleção de Armamento 01/09/1980)** traz o valor de PA através de um nomograma. O processo para a construção desse nomograma é:

a) Constroem-se duas colunas, em escala logarítmica em que uma vai conter o valor da razão entre a largura do alvo e o ECP e a outra conterá o valor da razão entre a altura do alvo e o ECP.
b) Entre essas duas colunas toma-se uma terceira coluna contendo os valores das probabilidades, atribuindo-se probabilidade 1 para o topo das colunas bastando colocar o restante das marcações também em escala logarítmica.

A leitura do valor da PA através do nomograma apresentado se dá marcando o valor da razão largura do alvo/ECP que é numericamente igual a 1,5, na primeira coluna , marcando o valor da razão altura do alvo/ECP que resulta em 10, na terceira coluna e unindo essas duas marcações através de um segmento de reta. O local em que esse segmento cortar a segunda coluna, representa o valor da PA para essa metralhadora. Procedendo como descrito acima, se tem que o valor da PA é aproximadamente 0,53. Esse resultado é bastante concordante com os calculados com a metodologia Monte Carlo.

V. CONCLUSÃO

O valor da PA, em absoluto, obteve a mesma ordem de grandeza entre o valor lido no nomograma e o valor obtido pelo programa discutido acima. Com base nesse resultado se pode dizer que a técnica de Monte Carlo pode ser empregada para análises mais detalhadas do alvo. O algoritmo utilizado para o cálculo dessa PA não é único, de forma que outras abordagens, também utilizando o caráter aleatório podem levar ao mesmo resultado. Esse trabalho foi o primeiro de uma série de problemas apresentados em [1]. Todos esses problemas têm solução obtida por leituras em nomogramas. Se for necessário o uso de um resultado preciso, esse método analítico-geométrico não é muito bom, pois aí está associado o erro do leitor. Fica como sugestão para trabalhos futuros a introdução da aleatoriedade na escolha do ponto de mira. Esse fator vai estudar parâmetros importantes para sucesso numa missão como essa. Exemplos que justificam essa complicação são o despreparo do operador no uso da metralhadora, uma metralhadora que está acoplada a um carro de combate e que está sujeito a imperfeições no solo, armamento em vôo cativo numa aeronave sujeita a vibrações, entre outras possíveis formas de análise.

REFERÊNCIAS

[1] Documento Confidencial. Ministério da Aeronáutica, MMA 136-1, Manual de Seleção de Armamento. Setembro 1980.
[2] Childs, D.R., Coffey, D.M., and Travis, S.P.: "Error Measures for Normal Random Variables," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, AES-14(l), 6467,January 1978.
[3] Scott, Logan. "Linear, Radial and Spherical Error Probable". October 1997.