Utilização de Simulação Monte Carlo para Cálculo de Probabilidade de Sucesso de Missão Aérea

CC(EN) Fernando A. A. Coelho[1], Paulo C. Miscow[2], e Wilson J. Vieira[3]
[1]DSAM-MB, Praça Barão de Ladário, s/n. Edifício Barão de Ladário, Rio de Janeiro, RJ; [2]ASD-IAE, Praça Marechal Eduardo Gomes, 50, Campus do CTA, São José dos Campos, SP; e [3]IEAv/CTA, Rodovia dos Tamoios, km 5,5, São José dos Campos, SP

***Resumo* — O planejamento de missão aérea considera a probabilidade de sucesso para uma determinada configuração de aeronaves, número de bombas, presença de defesa aérea, nível do dano desejado, etc. Esse planejamento é comumente realizado por meio da análise combinatória, que por meio de fórmulas fatoriais, fornece as probabilidades que auxiliam na decisão do emprego de forças. Nesse trabalho, o problema, que foi primeiramente estudado por Harry, H. C., é revisitado no cenário dos dias atuais, em que se dispõe de ferramentas computacionais que permitem a realização de simulações Monte Carlo para validar as fórmulas fatoriais e a demonstração da versatilidade desta metodologia de análise operacional em permitir grandes sofisticações de cenários. Além disto, a falta de dados mais confiáveis sugere a necessidade de utilizar simulação Monte Carlo também para inferências de parâmetros e outros dados de entrada. Foram feitos programas simples para comparar resultados.**

***Palavras-chaves* — Estimativa de emprego de força, planejamento de missão, letalidade, simulação Monte Carlo.**

I. INTRODUÇÃO

A tomada de decisão sobre a quantidade de força a ser empregada para se atingir determinado objetivo é um problema que vem sendo estudado matematicamente desde os primórdios do século XX. O engenheiro inglês Frederick Willian Lanchester foi o pioneiro na modelagem matemática a cerca do emprego de forças no “combate moderno”, tentando explicar quantitativamente, a dinâmica de combate e o emprego de forças concentradas. Tentava-se responder perguntas do tipo: Quem vencerá o combate? Quantos sobreviverão?

No planejamento da missão aérea, o histórico de lançamentos de bombas e mísseis em combates ou exercícios, permite inferir a probabilidade de acerto de tiro único, *PTU*, de determinado armamento, bem como a quantidade necessária de acertos para destruir determinados tipos de alvos, N_d. Este último dado também pode ser obtido a partir de modelos de vulnerabilidade de alvos versus letalidade do armamento, e a partir da realização de simulações repetidas para, por meio da contagem de eventos favoráveis, estimar a quantidade de lançamentos necessários para neutralização do alvo. Esta é a metodologia de simulação Monte Carlo.

Um problema simplificado foi estudado em [2] e resolvido utilizando-se análise combinatória para solução. O problema consiste em encontrar o número mínimo de armamentos a serem empregados em um ataque aéreo simultâneo (tiro em salva), para um determinado nível de confiança de sucesso da missão, P_S, dados o número mínimo de acertos necessário para neutralização do alvo, N_D, e a *PTU* do armamento empregado. A solução recai numa distribuição de probabilidade binomial, em que a probabilidade de um sucesso é $p=PTU$, e deve-se achar o número mínimo de bombas a serem lançadas, N, de modo que a probabilidade de acertar N_D ou mais artefatos seja maior que P_S. A solução deste problema recai no seguinte:

$$\mathrm{Min}_{\mathrm{N}} \sum_{k=N_D}^{N} \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} > P_S \qquad (1)$$

Nesta equação, é importante utilizar um algoritmo apropriado para realizar o cálculo dos fatoriais das fórmulas em um computador, pois rapidamente os resultados podem superar a resolução máxima da máquina, gerando *overflow* ou truncamento de resultados. Uma solução adequada é fazer as divisões, nos combinatórios, sucessivamente, dos maiores números do numerador pelos maiores números dos denominadores [1].

De qualquer modo o problema torna-se difícil de resolver algebricamente para *N*, de modo que em [2], são apresentados gráficos onde se variam alguns dos parâmetros para serem utilizados como ábacos para solução do problema.

II. APLICAÇÃO DE SIMULAÇÃO MONTE CARLO

A. Modificação do cenário

O problema torna-se mais complicado na medida em que outros fatores são considerados, como a existência de defesas antiaéreas a serem vencidas pelas aeronaves que transportam as munições, antes de chegarem ao local do ataque e estarem aptas a realizar o lançamento. Neste caso, deve ser considerada a probabilidade de chegada, P_C, que é a probabilidade de uma aeronave vencer a defesa antiaérea.

Quando apenas uma bomba é transportada por aeronave, a solução do problema recai também em (1), sendo *N* o número de aeronaves a serem empregadas, porém com a probabilidade de sucesso de um tiro dada por

$$p = P_C \times PTU \qquad (2)$$

O mesmo não pode ser dito quando cada aeronave transporta mais de uma bomba, pois ao se abater uma aeronave

Fernando A. A. Coelho, feraac@hotmail.com, Paulo C. Miscow, miscow@iae.cta.br, Tel +55-12-3947-5701, Wilson J. Vieira, wilsonjw@ieav.cta.br, Tel. +55-12-3947-5505.

transportando N_B bombas, todos estes artefatos são perdidos simultaneamente, de modo que a probabilidade de chegada tem um efeito maior na probabilidade final de sucesso.

Para entender este caso, suponha-se uma missão de uma aeronave transportando N_B bombas, igual ao número necessário para neutralizar o alvo, N_D. Então, a probabilidade de sucesso da missão (nível de confiança) é dada por

$$P_S = P_C \times PTU^{N_B} \tag{3}$$

Por outro lado, substituindo-se (2) em (1), com N=N_D=N_B, obtém-se

$$P_S = (P_C \times PTU)^{N_B} \tag{4}$$

Nota-se que (4) só é equivalente a (3) em condições muito especiais: quando $N_B = 1$, ou quando $P_C = 1$, ou seja, quando o número de bombas por aeronave é um, ou quando não há defesa antiaérea. Portanto, não se pode utilizar (2) combinado com (1) para qualquer caso. Porém, será demonstrado nas simulações que estas duas equações combinadas fornecem valores aproximados, quando

$$P_C \to 1 \quad \text{e} \quad N \gg N_B \tag{5}$$

A simples introdução de uma probabilidade de chegada e delimitação do número de bombas por aeronave torna muito mais difícil a solução do problema por análise combinatória. É então que se recorre à simulação Monte Carlo.

Outras considerações, como o ataque simultâneo à defesa antiaérea, de modo que a probabilidade de chegada P_C aumenta à medida que as forças de defesa vão sendo neutralizadas, tornam impossível utilizar-se a distribuição binomial, que requer probabilidade de sucesso do evento, p, constante.

B. Cálculo da probabilidade de sucesso da missão

Para demonstrar a versatilidade da utilização da simulação Monte Carlo na solução de problemas desta natureza, um pequeno programa foi elaborado para calcular a probabilidade de sucesso de uma missão aérea de ataque, P_S, em função dos dados de entrada:

- N_A = Número de aeronaves;
- N_B = Número de bombas por aeronaves;
- N_D = Número de bombas necessárias para destruir o alvo;
- P_C = Probabilidade de chegada;
- PTU = Probabilidade de tiro único da bomba; e
- N_{HIS} = Número de histórias da simulação Monte Carlo.

A cada história é sorteado aleatoriamente se a aeronave consegue vencer a defesa antiaérea e, caso afirmativo, se as bombas lançadas acertam o alvo. Os acertos então são contados e a missão (história) é considerada bem sucedida sempre que o número de acertos de bombas lançadas for igual ou superior a N_D. O processo é então repetido N_{HIS} vezes para contagem do número de missões bem sucedidas. Ao final, a probabilidade de sucesso da missão, com aquela configuração, é dada por:

$$P_S = \frac{N_S}{N_{HIS}} \tag{6}$$

A Fig. 1 ilustra o fluxograma deste procedimento. Desde que o número de histórias seja suficientemente grande, a probabilidade de sucesso terá pequeno desvio padrão, sendo, portanto, uma boa estimativa para o nível de confiança de sucesso de uma missão com a configuração dada.

Utilizado como uma sub-rotina, este programa pode resolver o problema de modo inverso, ou seja, calcular o número de aeronaves e bombas a serem empregados em um ataque aéreo, com certo nível de confiança desejado, auxiliando assim no processo de decisão do emprego de força.

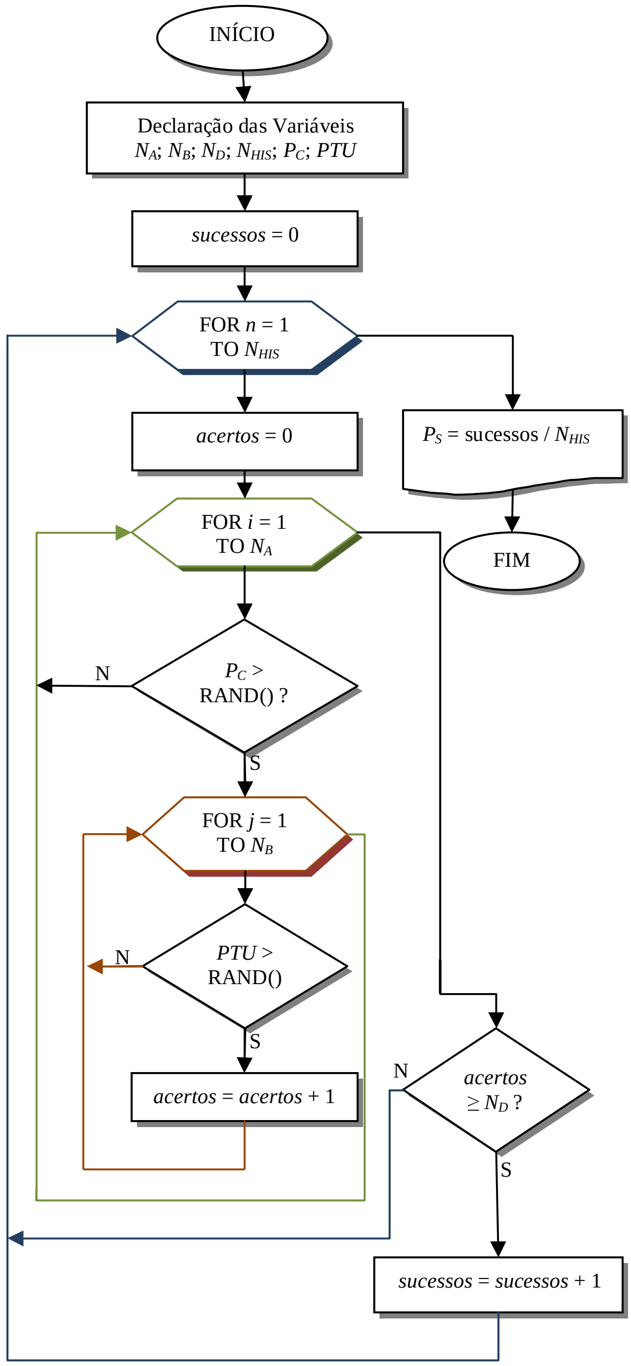

Fig. 1. Fluxograma do programa.

C. Cálculo da PTU e avaliação de dano

A probabilidade de tiro único (*PTU*) de determinado armamento leva em conta o desvio-padrão ou o erro circular provável (*ECP*) calculado pelo histórico de missões e exercícios realizados e as dimensões do alvo.

Para estabelecer uma relação entre os desvios-padrão nos eixos de lançamento (*X*) e lateral (*Y*) com o *ECP*, é necessário fazer simplificações que levam a considerar os disparos como uma distribuição normal circular com desvio-padrão σ. Uma relação comum é dada por [3]

$$ECP = 1{,}1774\sigma \tag{7}$$

Dado o *ECP*, é preciso levar em consideração a geometria do alvo para calcular a probabilidade de tiro único. Na literatura são encontradas fórmulas integrais para alvos circulares, retangulares e elípticos [3].

Também para estimar o número necessário de artefatos para neutralização do alvo, N_D, quando não se dispõe de dados históricos de combate, deve ser levado em consideração a natureza dimensional do alvo, que se divide em duas categorias: (i) alvos pontuais e (ii) alvos de área. Os alvos são considerados pontuais quando sua área é muito menor à área total danificada por um único tiro, por exemplo, silos de mísseis, antenas de radar e pequenas pontes. No caso de alvos de área, também pode ser levado em consideração a maior vulnerabilidade de certos setores da área do alvo. Mais uma vez, modelos matemáticos devem ser adotados para cada caso.

O emprego de simulação Monte Carlo no cálculo desses parâmetros apresenta vantagens pela sua flexibilidade. Alterar a dimensão de um alvo, adicionar vulnerabilidade a certas partes, ou considerar a não-uniformidade na distribuição dos tiros, em geral, requer apenas a alteração ou inclusão de algumas linhas de comando em um programa de simulação.

III. RESULTADOS

Utilizando o algoritmo proposto na Fig. 1 com $N_B = P_C = 1$, o problema se torna equivalente a resolver o problema inicialmente proposto na seção Introdução, isto é: de encontrar o número mínimo de bombas a serem lançadas em salva, N_A, para neutralizar um alvo, com probabilidade de sucesso P_S, sabendo a *PTU* e N_D. A Fig. 2 mostra três gráficos, um para cada valor de N_D, que auxiliam na solução deste problema, enquanto a Tabela I apresenta uma comparação dos valores de P_S obtidos usando (1) ou a simulação Monte Carlo com 10^5 histórias.

TABELA I – PROBABILIDADE DE SUCESSO DA MISSÃO CALCULADA PELOS MÉTODOS CONVENCIONAL E MONTE CARLO.

PARÂMETROS			MÉTODO	
N_D	N_A	PTU	Monte Carlo (P_S %)	Convencional (P_S %)
1	2	0,2	36,19 ± 0,1520*	36,00
1	2	0,8	95,90 ± 0,0627	96,00
1	4	0,2	59,04 ± 0,1555	59,04
1	4	0,8	99,85 ± 0,0122	99,84
4	8	0,2	5,65 ± 0,0730	5,63
4	8	0,8	98,98 ± 0,0318	98,96
4	16	0,2	40,28 ± 0,1551	40,19
4	16	0,8	100,00 ± 0,0000	100,00

* Desvio padrão dado por $\sigma_{\%} = \sqrt{P_s(1-P_s)/10^5} \times 100\%$

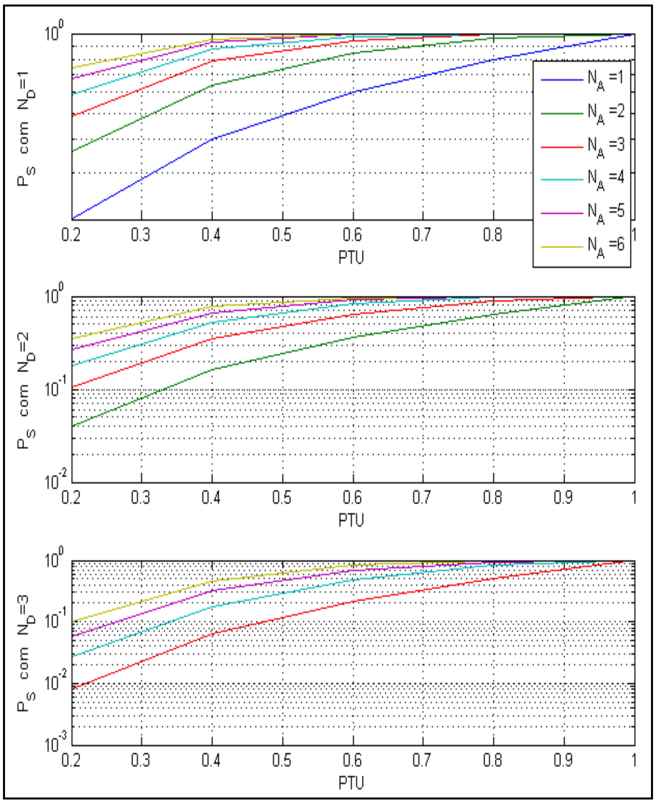

Fig. 2. Gráficos para achar a probabilidade de sucesso da missão, P_S, dados o número de bombas lançadas, N_A, a probabilidade de tiro único, *PTU*, quando o número mínimo de acertos deve ser N_D =1, 2 ou 3.

Quando se considera a probabilidade de chegada e o número de bombas por aeronave não mais unitários, verifica-se que (1) fornece valores aproximados apenas quando (5) pode ser considerado verdadeiro. Para mostrar este resultado, calculou-se a probabilidade de sucesso da missão com N_D=3, P_C=*PTU*=0,5, para N_A e N_B variado de 1 a 16 e de 1 a 4, respectivamente, em todas as 64 combinações possíveis, e calculou-se a diferença percentual em relação ao método Monte Carlo, para cada caso. A Fig. 3 apresenta um gráfico com os resultados. O erro passa a ser desprezível apenas quando a relação N_A/N_B é superior a nove.

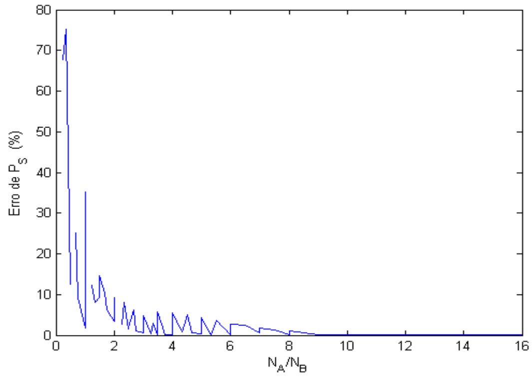

Fig. 3. Gráficos do erro percentual de P_S calculado pelo método convencional aproximado, em relação à simulação Monte Carlo.

A Tabela II apresenta os resultados de simulação para diversos valores de probabilidade de chegada, P_C, com N_B=2, N_A=16, N_D=6 e *PTU*=0,2. Destes resultados, percebe-se que o método convencional aproximado fornece valores tão mais precisos quanto maior é a probabilidade de chegada.

TABELA II – PROBABILIDADE DE SUCESSO DA MISSÃO QUANDO N_B=2, PTU=0,2, N_A=16 E N_D=6.

P_C	MÉTODO Monte Carlo (P_S %)	MÉTODO Convencional (P_S %)	Erro (%)
0,2	0,35	0,15	133,3
0,4	4,99	3,90	27,9
0,6	18,71	17,88	4,6
0,8	40,43	40,66	0,6
1,0	63,49	63,98	0,8

IV. CONCLUSÃO

Desde que se disponha de modelos confiáveis dos aspectos mais importantes do combate, como a vulnerabilidade e a letalidade dos elementos de combate envolvidos, a metodologia de Monte Carlo pode ser empregada para calcular tanto a probabilidade de sucesso da missão, como os parâmetros da simulação do combate.

Enquanto que os métodos tradicionais de análise combinatória requerem uma análise apurada dos eventos envolvidos no combate, quando se altera o cenário, a metodologia Monte Carlo, em geral, requer apenas a alteração de algumas linhas de comando no programa de simulação.

REFERÊNCIAS

[1] Brito Jr., F. M. e Miscow, P. C., “Projeto do Manual Eletrônico de Seleção de Armamento”, em Anais do VIII Simpósio de Guerra Eletrônica (SIGE), ITA, São José dos Campos-SP, 2006.

[2] Merrill, G., Goldberg, H. and Helmholz, Robert H., *Operations Research Armament Launching*, pp. 149-166. Lancaster Press, USA, 1956.

[3] Jaiswal, N. K., *Military Operations Research: Quantitative Decision Making*, pp. 28-56, Kluster Academic Publishers, 3rd Edition, 2003.