

# Modelos integrados de planejamento da produção em uma fábrica de engrenagens

Almeida, J. F. F., Pinto, C. M. C., Moreira, J. C., Conceição, S. V.

Universidade Federal de Minas Gerais, Av. Antônio Carlos, 6627 - CEP: 31270-901 - Belo Horizonte – M.G.

**Resumo** — Este estudo de caso apresenta o uso de dois modelos matemáticos para planejamento da produção em uma empresa de manufatura de redutores, motores e acoplamentos: um modelo matemático de dimensionamento de lotes e um modelo matemático de sequenciamento de operações. Foram feitas atividades de mapeamento do processo e desenvolvimento de modelos matemáticos para o problema real. As instâncias foram solucionadas por meio do aplicativo livre Glpk versão 4.9. Os resultados computacionais demonstraram a solução exata para o problema de dimensionamento de lotes e para o problema de sequenciamento apresentando-se viável para a atual configuração de fábrica.

**Palavras-chaves** — Sequenciamento, Flow shop, Máquinas Paralelas.

## I. INTRODUÇÃO

O planejamento e sequenciamento da produção é uma das atividades mais complexas para quem está na responsabilidade de gestão de operações em uma organização.

Avanços em técnicas de modelagem matemática juntamente com o avanço de tecnologia de hardwares e softwares de otimização permitem que operações reais detalhadas, como as de planejamento da produção, sejam bem representadas e resolvidas por técnicas de pesquisa operacional.

O processo de planejamento e controle de produção envolve decisões de longo, médio e curto prazo. Este estudo foca decisões de médio e curto prazo relacionando questões principalmente no que diz respeito ao dimensionamento de lotes e sequenciamento das operações da fábrica e foi motivado pelo sistema de produção de uma indústria de engrenagens que funciona de forma ininterrupta. Apresenta-se um modelo de planejamento da produção por dimensionamento de lotes para a etapa gargalo de produção de engrenagens, ou seja, o processo de tratamento térmico em fornos de cementação. Em seguida é apresentado outro modelo para determinar a seqüência das operações posteriores à etapa de processamento térmico buscando reduzir o tempo de entrega do produto final. A preocupação em determinar o tamanho de lote por período para a etapa gargalo é a necessidade de atendimento da demanda semanal ao custo mínimo. O sequenciamento das operações posteriores a esta etapa também é

importante, pois existem outros produtos, além das engrenagens, a serem produzidos e a redução do tempo de operação em engrenagens disponibiliza mais tempo para dedicação em operações de produtos de menor importância.

Referências como [13], [15], [11] e [2] apresentam modelos matemáticos para o problema capacitado de dimensionamento de lotes, mono e multi-produtos. Os três últimos abordam problemas relacionados com fundições. Estes analisam o problema de dimensionamento de lotes capacitado, o dimensionamento de lotes para indústrias de fundição automatizada e em uma de pequeno porte.

A classificação de problemas de dimensionamento de lotes quanto ao horizonte de planejamento pode ser encontrada em [5]. O problema de dimensionamento de lotes do presente estudo de caso é classificado como *small time bucket*, pois permite apenas um *setup* por período embora forneça informações para decisões táticas. O manuseio de perdas de custo ou tempo de *changeovers* para problemas de dimensionamento de lotes multi-item e único-item estão presentes em [18].

O tratamento simultâneo de problemas de dimensionamento de lotes e de sequenciamento de operações está presente em estudos como os de [7], [10], [8], [14], [16] [17] e [9].

Uma detalhada classificação de modelos de sequenciamento pode ser encontrada em [1], que apresenta uma revisão e classificação dos modelos relacionados à agregação ou não agregação em lotes, tempos de *setup* dependentes ou não da seqüência, ou em considerações relacionadas ao ambiente fabril, como máquinas paralelas ou únicas, *flow shop*, *job shop*, *flow shop* flexível, entre outros. Algumas particularidades encontradas em situações reais vêm sendo incorporadas em modelos matemáticos de sequenciamento de produção como: sequenciamento com lotes, inclusão de tempos de *setup* dependentes da seqüência com dados determinísticos ou estocásticos. Ver, por exemplo, [1], [3], [4] e [12].

O artigo está organizado na seguinte forma: na próxima seção é feita uma descrição do processo de produção e do problema. A modelagem do problema de dimensionamento de lotes e a demonstração de um exemplo são propostas na seção III enquanto que a modelagem do problema de sequenciamento de operações é proposta na seção IV. Os resultados computacionais são encontrados na seção V. Finalmente, na seção VI são apresentadas conclusões.

## A. Descrição do processo e do problema

A empresa analisada é uma das gigantes mundiais especializada em fabricação de engrenagens para redutores. Foram selecionadas duas engrenagens consideradas “carros-chefe” da empresa, pois estas têm prioridade total sobre os outros produtos em todas as suas fases de produção. Estas engrenagens são do tipo all life devido à dificuldade de se fazer manutenção nos equipamentos que as utiliza. O compromisso de entrega é semanal e a quantidade é diferenciada por tipo de engrenagem.

As seqüências tecnológicas e quantidades de máquinas disponíveis para cada operação se encontram nas Tabelas I e II.

TABELA I SEQÜÊNCIA TECNOLÓGICA DA  
ENGRENAGEM\_1

| Engrenagem_1               |                  |
|----------------------------|------------------|
| Operação                   | Máq. Disponíveis |
| Torneamento                | 2                |
| Fresamento                 | 3                |
| Furação                    | 2                |
| Rebarba                    | 2                |
| Tratamento térmico         | 3                |
| Jato de granalha           | 1                |
| Torneamento CNC            | 1                |
| Retífica do Furo e da Face | 1                |
| Retífica de dente          | 4                |
| CQ (Dimensional)           | 1                |
| Arredondar dentes          | 2                |
| CQ (Partículas Magnéticas) | 1                |
| Decapagem Química          | 1                |

O tratamento térmico é o gargalo da linha. Esta conclusão foi obtida em avaliação com técnicos da área de produção. Esta área é composta de três conjuntos formados por forno de cementação, tanque de óleo para têmpera, tanque de limpeza e forno de revenimento.

Além disto, esta área se diferencia das demais por ser a única que trabalha em bateladas. Este gargalo, e o fato da engrenagem\_2 ter suas primeiras fases de produção em outra empresa, leva à divisão do problema em três partes.

## A. Planejamento da produção da área de tratamento térmico

Três conjuntos de equipamentos compõem a área de tratamento térmico. Cada conjunto é formado por um forno, onde é feita a cementação, uma estação para têmpera em óleo, um tanque de limpeza e um forno de revenimento (Tabela III).

TABELA II SEQÜÊNCIA TECNOLÓGICA DA  
ENGRENAGEM\_2

| Engrenagem_2               |                  |
|----------------------------|------------------|
| Operação                   | Máq. Disponíveis |
| Fornecedor externo         |                  |
| Tratamento térmico         | 3                |
| Jato de granalha           | 1                |
| -                          |                  |
| Retífica do Furo e da Face | 2                |
| Retífica de dente          | 2                |
| CQ (Dimensional)           | 1                |
| Arredondar dentes          | 2                |
| CQ (Partículas Magnéticas) | 1                |
| Decapagem Química          | 1                |

TABELA III LOTE MÚLTIPLO DE CADA FORNO PARA  
A OPERAÇÃO DE TRATAMENTO TÉRMICO

| Nº engr./forno | Forno_1 | Forno_2 | Forno_3 |
|----------------|---------|---------|---------|
| Engrenagem_1   | 20      | 4       | 3       |
| Engrenagem_2   | 6       | 2       | -       |

O modelo matemático de dimensionamento de lotes busca minimizar a quantidade de preparações de  $L$  etapas de tratamento térmico para  $J$  engrenagens ao longo de  $T$  períodos de planejamento atendendo, com produtos acabados, os pedidos semanais  $D_{jt}$  dos clientes. A capacidade disponível  $C_{lt}$  para o planejamento é dada pelo tempo disponível em cada semana. Como o sistema de produção é ininterrupto, temos 168 horas disponíveis na semana, enquanto que operações posteriores ao tratamento térmico ocorrem durante 6 dias da semana. Os tempos de processamento nesta área são 50 e 59 horas de cementação para a engrenagem 1 e 2 respectivamente, 1 hora em têmpera e, em seguida, 8 horas de cementação para cada uma delas.

A quantidade de engrenagens processada em cada forno (lote múltiplo) é dada função de sua carga:

Os parâmetros considerados no modelo são:

$C_{lt}$  : Capacidade disponível do forno  $l$  no período  $t$ ;

$D_{jt}$  : Demanda da engrenagem  $j$  no período  $t$ ;

$I_{j0}$  : Estoque inicial da engrenagem  $j$ ;

$h_j$  : Custo de estoque da engrenagem  $j$ ;

$P_{lj}$ : Parte da capacidade do forno  $l$  necessária para produzir uma unidade da engrenagem  $j$ ;

$M_{lj}$ : Lote padrão de engrenagens  $j$  no forno  $l$ ;

$F_l$ : Tempo de preparação do forno  $l$ ;

$S_j$ : Custo de *setup* relacionado à decisão de *setup* da engrenagem  $j$

As variáveis consideradas são:

$I_{jt}$ : Estoque da engrenagem  $j$  no final do período  $t$ ;

$Q_{ljt}$ : Quantidade lotes padrão de engrenagens  $l$  produzidas no forno  $j$  no período  $t$ ;

$y_{ljt}$ : Variável binária que indica se o forno  $l$  está preparado para as engrenagens  $j$  no período  $t$  ( $y_{ljt} = 1$ ) ou não ( $y_{ljt} = 0$ );

$x_{ljt}$ : Lote múltiplo. Número de lotes de engrenagens  $j$  a ser produzido no forno  $l$  no período  $t$ ;

O modelo pode ser representado na seguinte forma:

$$\min \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \sum_{t=1}^T R_l y_{ljt} + H_j I_{jt} \quad (1)$$

sujeito a:

$$I_{j(t-1)} + \sum_{l=1}^L Q_{ljt} = D_{jt} + I_{jt} \quad (2)$$

$$j \in J \quad t \in T$$

$$Q_{ljt} P_{lj} \leq (C_{lt} - F_l) y_{ljt} \quad (3)$$

$$l \in L \quad j \in J \quad t \in T$$

$$\sum_{j=1}^J y_{ljt} \leq 2 \quad l \in L \quad t \in T \quad (4)$$

$$x_{ljt} M_{lj} = Q_{ljt} \quad l \in L \quad j \in J \quad t \in T \quad (5)$$

$$y_{ljt} \in \{0,1\} \quad l \in L \quad j \in J \quad t \in T \quad (6)$$

$$x_{ljt} \in Z^+ \quad l \in L \quad j \in J \quad t \in T \quad (7)$$

$$I_{jt} \geq 0 \quad j \in J \quad t \in T \quad (8)$$

$$Q_{ljt} \geq 0 \quad l \in L \quad j \in J \quad t \in T \quad (9)$$

O objetivo (1) é minimizar a soma dos custos com *start-up* dos fornos de tratamento térmico. (2) representa o balanceamento de estoques ao longo dos períodos. (3) determina que o tratamento térmico das engrenagens ocorra em respectivos fornos se estes estiverem preparados para tal. O tempo de *start-up* em cada forno é deduzido da do tempo total disponível, ou seja, a capacidade, no início de cada período. (4) garante que os fornos processem no máximo 2 tipos de engrenagens em cada período. (5) determina que a quantidade de engrenagens a ser processada em cada forno e período deve ser múltipla do lote padrão determinado por cada forno. (6) define a variável de *start-up* como binária enquanto que a (7) define a

variável de lote múltiplo como inteira. É interessante notar que as variáveis  $I_{jt}$  e  $Q_{ljt}$  são simplesmente não negativas (veja (8) e (9)), embora se comportem como variáveis inteiras. Isso ocorre pelo fato de estarem ligadas à (5) e (7) e os dados de demanda e estoque inicial serem números inteiros.

Desta forma, considera-se a resposta do modelo de dimensionamento de lotes para o tratamento térmico como ponto de partida para cálculo do *makespan* no modelo de seqüenciamento.

### B. Sequenciamento de operações e modelagem do problema

As duas engrenagens seguem o mesmo processo de produção, porém a engrenagem\_2 inicia a sua produção em uma subsidiária da empresa. A engrenagem\_1 tem todo seu fluxo de produção internamente. A partir dos fornos de tratamento térmico elas compartilham o processo produtivo. O planejamento descrito pelo modelo parte do pressuposto que os lotes múltiplos de engrenagens estejam disponíveis no momento estritamente anterior ao processo de tratamento térmico visando evitar perdas de tempo nesta área.

O objetivo é minimizar o tempo total de produção destas engrenagens de forma a atender a demanda no menor tempo possível e disponibilizar mais tempo útil à produção dos produtos com menos prioridade. Os produtos devem ser alocados em diferentes máquinas e tempos ao longo da linha de manufatura. O objetivo é encontrar o menor tempo total de produção, ou seja, o *makespan*.

Os parâmetros gerais e específicos das linhas de produção estão descritos abaixo:

$\Gamma^+(o)$ : Conjunto de operações sucessoras à operação (o);

$M_o$ : Conjunto de máquinas que podem executar a operação (o).

$P_{ok}$ : Tempo de execução da operação (o) na máquina (k).

$R_o$ : Data de início da operação (o). Tempo de processamento da operação de tratamento térmico.

As variáveis de decisão são:

$t_o$ : Data de início da operação (o);

$C_{\max}$ : *Makespan*;

$p_o$ : Tempo de execução da operação (o);

$y_{ok}$ : Decisão de alocar ou não a operação (o) na máquina (k);

$y_{oo}$ : Decisão de alocar a operação (o) antes da operação (o') ou não;

O modelo fica descrito na seguinte forma:

$$\min C_{\max} \quad (1)$$

s à:

$$\sum_{k \in M_0} y_o^k = 1 \quad o \in O \quad (2)$$

$$p_o = \sum_{k \in M_0} p_o^k y_o^k \quad o \in O \quad (3)$$

$$t_{o'} - t_o \geq p_o \quad (4)$$

$$\forall (o, o') \in O \times O; o' \in \Gamma^+(o)$$

$$t_{o'} - t_o + (1 - y_{oo'})M \geq$$

$$p_o - (2 - y_o^k - y_{o'}^k)M \quad (5)$$

$$\forall k \in M; \forall o, o':$$

$$m(o) = m(o'); o \neq o'$$

$$t_{o'} - t_o + y_{oo'}M \geq$$

$$p_{o'} - (2 - y_o^k - y_{o'}^k)M \quad (6)$$

$$\forall k \in M; \forall o, o':$$

$$m(o) = m(o'); o \neq o'$$

$$C_{\max} \geq t_o + p_o \quad o \in O \quad (7)$$

$$t_o \geq 0 \quad o \in O \quad (8)$$

$$p_o \geq 0 \quad o \in O \quad (9)$$

$$y_{oo'} \in \{0,1\} \quad (10)$$

$$\forall o, o': m(o) = m(o'); o \neq o'$$

$$y_o^k \in \{0,1\} \quad o \in O \quad k \in R \quad (11)$$

$$t_o \geq R_o \quad o \in O \quad (12)$$

O modelo determina o tempo das operações assim como a seqüência ótima de operação nas máquinas do sistema *flow shop*. A consequência do modelo é a obtenção do menor tempo de operação das duas engrenagens ao longo do horizonte de planejamento.

O objetivo é minimizar a data mais tarde da última operação. (2) limita à apenas uma máquina por operação. (3) determina o tempo de cada operação. (4) garante que a data de início de uma operação sucessora é a data de início da predecessora mais o tempo de operação desta. A alocação de operação em máquinas é determinada por (5) e (6). (7) define que a última data ocorre depois do tempo de processamento mais a data de início de todas as operações. O domínio das variáveis: data de início de operação, tempo de processamento e alocação de operação são definidos em (8), (9), (10) e (11). (12) adapta o modelo de [6] ao ambiente *flow shop*, pois determina que a data inicial de produção de cada lote só ocorre após o

processamento do lote. O tamanho do lote é determinado no modelo acima de dimensionamento de lotes, dessa forma, ao acrescentamos a data de chegada de cada *job* ao problema incluímos a operação de tratamento térmico no cálculo do *makespan*. Esta data de chegada foi obtida a partir do modelo de dimensionamento de lotes proposto.

### C. Resultados computacionais

Optou-se pelo uso do aplicativo livre GLPK, utilizado para resolução de Problemas de Programação Linear (PPL) e Problemas de Programação Inteira Mista (PPIM). Os dados relativos aos números de operações e seqüência de operações estão descritos nas seções acima.

O modelo de dimensionamento apresenta 137 restrições e 160 variáveis. O problema é resolvido com 3,1 segundos enquanto que o modelo de seqüenciamento apresenta 179 restrições e 105 variáveis para o exemplo proposto. O resultado ótimo é apresentado em 0,1 segundos, porém instâncias com mais operações e com tempo em minutos torna a execução do modelo mais lenta.

Embora os dados do exemplo não sejam dados reais, manteve-se uma proporcionalidade dos dados por questões éticas, viabilizando também a comparação com o modelo. O sistema produtivo da empresa leva em média 27% do tempo a mais que o modelo determina. Utilizou-se a média, pois os dados de produção não seguem um padrão para quantidades produzidas e estocadas ao longo dos períodos de produção.

O problema proposto, dessa forma, determina o seqüenciamento de operações para o plano da produção previsto, apresentando o tempo reduzido de produção.

### D. Conclusão

O modelo matemático apresentado resolve um problema de dimensionamento de lotes e um modelo de seqüenciamento da produção que faz escolha de alocação de operações às máquinas de linhas de manufatura e em um sistema *flow shop* de máquinas paralelas reduzindo aproximadamente em 27% o tempo total de produção. Os planos semanais de produção determinados pelo modelo de dimensionamento de lotes são parâmetros de entrada para o modelo de seqüenciamento. Como o tempo de *setup* não é dependente da seqüência de produção, consideramos estrategicamente o tempo de operação de cada peça o equivalente ao tempo padrão de operação acrescido do tempo de *setup*.

A inclusão da última restrição no modelo de seqüenciamento, além de considerar a operação de tratamento térmico no cálculo do *makespan*, faz a adaptação do modelo de dimensionamento de lotes ao modelo de seqüenciamento.

O efeito do positivo de se modelar um problema de ambiente fabril é viabilidade de implementação prática por meio de *software*. Desta forma, tem-se uma ferramenta customizada da que permite a fazer uma reprogramação da produção a tempo hábil em caso de ocorrência de eventos aleatórios como quebra de máquina ou absenteísmo de operadores, além de se garantir a qualidade no planejamento e reduzir o nível de stress do planejador.

O modelo matemático se mostra apropriado para auxílio em tomadas de decisões, e apresenta um tempo total de produção menor do que encontrado na prática, se tornando de grande valia para o aumento de competitividade da empresa.

Uma perspectiva para pesquisas futuras seria evoluir mais o método de elaboração matemática do modelo, usando modelos integrados de dimensionamento de lotes e sequenciamento de operações com concorrência destas engrenagens com produtos de menos importância. O uso de heurísticas também se parece bem aplicável a este problema pontual de planejamento da produção devido às peculiaridades apresentadas no mesmo, que são de difícil representação por modelos matemáticos.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Allahverdi, A., Ng, C. T., Cheng, T.C.E.; Kovalynov, M.Y. (2006), A survey of scheduling problems with setup time or costs, *European Journal of Operational Research*, in press.
- [2] Araujo, S. A., Arenales, M. N., Clark, A. R., *Lot sizing and furnace scheduling in small foundries*, Computers Operations Research, Vol. 35, pags. 916 - 932, 2008.
- [3] Arenales, M. N., Armentano, V., Morabito, R., Yanesse, H., *Pesquisa Operacional para cursos de engenharia*, Elsevier, São Paulo, 2006.
- [4] Askin, R. G., Standridge, C. R., *Modeling and Analysis of Manufacturing Systems*, John Wiley & Sons, USA, 1993.
- [5] Brahim, N., Dauzere-peres, S., Najid, N. M., Nordli, A. (2006), Single item lot sizing problems, *European Journal of Operational Research*, 168,1-16.
- [6] Carvalho, C.R.V., *Organização e Controle de Chão de Fábrica, Notas de aula*, Departamento de Engenharia de Produção, UFMG, Belo Horizonte, 2008.
- [7] Drexel, A., Kimms, A. (1997), Lot-sizing and scheduling - Survey and extensions, *European Journal of Operations Research*, 99,221-235.
- [8] Gupta, D., Magnusson, T. (2005), The capacited lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup times, *Computers & Operations Research*, 32,727-747.
- [9] Chen, K., Ji, P. (2007), A mixed integer programming model for advanced planning and scheduling (APS), *European Journal of Operational Research*, 181, 515-522.
- [10] Meyr, H.(2002), Simultaneous lot-sizing and scheduling on parallel machines, *European Journal of Operational Research*, 139, 277-292.
- [11] Meza, E. S., Santos, M. O., Arenales, M. N. (2002), A lot-sizing problem in an automated foundry, *European Journal of Operational Research*, 139, 490-500.
- [12] Pinedo, M. L., *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services*, Springer, USA, 2005.
- [13] Pochet, Y., Wolsey. L. A., *Production Planning by Mixed Integer Programming*, Springer, USA, 2006.
- [14] Santos, A. M., Dimensionamento de lote de produção em um problema de seqüenciamento de uma máquina com tempo de preparação: aplicação a uma indústria química, Tese de dissertação, n.157, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006, ([www.dep.ufmg.br/pos/defesas/diss155.pdf](http://www.dep.ufmg.br/pos/defesas/diss155.pdf))
- [15] Souza, M. C., Castro, A. C. (2006), Modelos matemáticos para atendimento a demanda e dimensionamento de lotes em sistemas de produção ininterrupta, *XXVIII SBPO*, 123- 130.
- [16] Toledo, c. F. M., França, P. M., Morabito, R., Kimms, A. (2007), Um modelo de otimização para o problema de dimensionamento de lotes e programação da produção em fábricas de refrigerantes, *Pesquisa Operacional*, 27, 155-186.
- [17] Toso, E. A. V., Morabito, R. (2005), Otimização no dimensionamento e sequenciamento de lotes de produção: estudo de caso em uma fábrica de rações, *Gestão e Produção*, 12, 203-217.
- [18] Wolsey, I. A. (1997), MIP modeling of changeovers in production planning and scheduling problems, *European Journal of Operational Research*, 99, 1544-1565.