

NCMA Otimizado para Mitigação de Interferentes Rectilineares Aplicado a Arranjos de Antenas

Adilson Chinatto^{1,2}, Cynthia Junqueira^{1,3} e João M. T. Romano¹

¹Universidade Estadual de Campinas, ²Spectrum Line Ltda., ³Instituto de Aeronáutica e Espaço

Resumo — O uso de arranjos de antenas para a mitigação de interferentes têm sido mostrado na literatura como um instrumento inovador em aplicações civis e militares. Os algoritmos não supervisionados podem ser considerados nestas aplicações objetivando evitar procedimentos de treinamento e tornar as transmissões e recepções mais eficientes e seguras. Aliando estes fatos à possibilidade de explorar as vantagens do processamento largamente linear, neste trabalho mostra-se o desempenho de uma versão otimizada do algoritmo do Módulo Constante Normalizado para sinais rectilineares. Resultados de simulações confirmam seu desempenho superior quando comparado à versão original estritamente linear.

Palavras-Chave — processamento largamente linear, algoritmo não supervisionado, NCMA.

I. INTRODUÇÃO

A estimação da direção de chegada de sinais de ondas planas que são recebidos por um arranjo de antenas tem recebido muita atenção das comunidades científicas relacionadas às áreas de radar, satélites e comunicações sem fio. As técnicas que permitem separar as direções de chegada de múltiplos sinais e que fazem a mitigação de sinais interferentes, intencionais ou não, usando arranjos de antenas adaptativas tem sido estudadas sistematicamente [1]-[3] para aplicações civis e militares.

Usando arranjo de antenas adaptativas, como um filtro espacial, um transceptor não se restringe a receber ou transmitir sinais com um diagrama de irradiação omnidirecional, ao invés disso, por meio das múltiplas antenas do arranjo e de um controle adequado dos coeficientes adaptativos do filtro, o diagrama de irradiação pode ser modificado, alterando-se a direção, amplitude e largura de feixe dos lóbulos principal e secundários.

Convencionalmente, um arranjo de antenas adaptativas tem seu controle feito com o apoio de uma seqüência de treinamento que é conhecida tanto no receptor como no transmissor. Este treinamento, entretanto, pode ter um alto custo computacional ou até mesmo ser não realista para algumas aplicações tais como redes de comunicação sem fio assíncrono. Objetivando sobrepor este tipo de problema e melhorar o sistema de transmissão, a seqüência de treinamento pode ser evitada utilizando-se de um sistema de recuperação dos sinais não supervisionado do lado do receptor.

Adilson Chinatto, chinatto@espectro-eng.com.br, Tel. +55-19-21164433, Cynthia Junqueira, cynthia.junqueira@iae.cta.br, Tel. +55-12-39474937, Fax. +55-12-39475019 João M. T. Romano, romano@dmo.feec.unicamp.br, Tel. +55-19-35213857.

Durante a última década, algoritmos adaptativos não supervisionados têm sido amplamente estudados [4]. Entre eles, aqueles que utilizam o critério de módulo constante [5],[6] se colocam entre as técnicas mais empregadas na recuperação autodidata, tanto quando são empregadas modulações FM ou PSK quanto QAM.

As técnicas autodidatas de módulo constante são aquelas baseadas no Algoritmo de Godard [5], [7] e naquele modificado por Treicheler e Agee [6], o algoritmo do Módulo Constante (CMA). Tal algoritmo é utilizado na equalização de canais de transmissão digital e sua característica fundamental é a não necessidade de um sinal piloto, ou de referência, tal como nos algoritmos supervisionados [8]. Para isso, baseia-se nos critérios que tem por princípio a restauração da propriedade de módulo constante da constelação de dados recebida. No contexto de um arranjo de antenas adaptativo, este critério levará os coeficientes do filtro espacial à convergência para uma situação onde se recupera a constelação do sinal incidente de maior potência, cancelando todos os outros, tanto interferentes como os desejados restantes.

O maior prejuízo na aplicação do CMA em sistemas de arranjos de antenas adaptativas está relacionado à sua propriedade de convergência. O CMA requer freqüentemente centenas ou até mesmo milhares de iterações para alcançar a convergência, sendo dependente das condições do canal, comprimento do equalizador, número de antenas no arranjo e também da relação sinal-ruído. Muitos pesquisadores vêm estudando técnicas para sobrepor estes problemas, e mais eficientemente melhorar a propriedade de recuperação da portadora, a convergência e também a interferência intersimbólica residual (ISI) [9], [10], [11], [12].

Simultaneamente, Brown e Crane [13] mostram que o processamento de arranjos adaptativos, sob determinadas condições de circularidade dos sinais, podem apresentar melhor desempenho caso seja aplicado o processamento largamente linear (WLP) ao invés de sua contrapartida estritamente linear (SLP) [14], [15], [16].

Entre estes estudos, neste artigo daremos especial atenção à uma técnica proposta por Hilal and Duhamel [17] que se baseia numa escolha particular do passo de adaptação do CMA de forma a minimizar o erro *a posteriori*, denominada Algoritmo do Módulo Constante Normalizado (NCMA).

Aqui, propomos uma otimização do NCMA, um novo algoritmo que efetua recuperação autodidata de sinais rectilineares com arranjos de antenas e processamento largamente linear (WLP). Objetiva-se analisar o desempenho deste novo algoritmo na tarefa de mitigação de interferentes num cenário de vários sinais incidentes no arranjo de antenas.

A estrutura do trabalho inclui na seção II uma breve revisão dos algoritmos do módulo constante e do módulo constante normalizado e na seção III considerações sobre o arranjo de antenas e o processamento largamente linear. O algoritmo NCMA otimizado é apresentado em IV e resultados de simulações e conclusões com perspectivas futuras são apresentadas em V e VI, respectivamente.

II. ALGORITMO DO MÓDULO CONSTANTE E DO MÓDULO CONSTANTE NORMALIZADO

O algoritmo de Godard [5] pertencente à família de algoritmos de Busgang [7] traz uma nova proposta para a equalização cega de sinais QAM. Os coeficientes do equalizador são obtidos heurísticamente de forma a manter a propriedade de módulo constante dos dados transmitidos. Esta técnica foi modificada por Treicheler e Agee [6] para outros esquemas de modulação tais como FM, PSK, entre outros, conhecido na literatura como Algoritmo do Módulo Constante (CMA), que tem equação de atualização dos coeficientes dada por:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \mu [|y(k)|^2 - 1] y^*(k) \mathbf{x}(k) \quad (1)$$

onde μ é o passo de adaptação.

O algoritmo CMA é o mais robusto entre os da família de Busgang em relação ao *offset* da portadora devido ao fato de que a função custo e a derivação do algoritmo são baseados somente na amplitude do sinal recebido. Por outro lado, o critério de Godard penaliza as amostras de saída $y(k)$ que não tem características de módulo constante.

Objetivando melhorar a estabilidade do algoritmo e minimizar a divergência na atualização dos coeficientes do equalizador, Hilal and Duhamel [17] propuseram uma modificação que permite a maximização da velocidade de convergência, denominada CMA normalizado (NCMA) levando à equação de recursão mostrada em (2).

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) - \frac{1}{\|\mathbf{x}(k)\|_2^2} \mathbf{x}(k) y^*(k) \left(1 - \frac{1}{|y(k)|}\right) \quad (2)$$

Denominaremos este algoritmo como Algoritmo do Módulo Constante Normalizado Estritamente Linear (NCMA-SL).

III. ARRANJO DE ANTENAS E O PROCESSAMENTO LARGAMENTE LINEAR

Neste trabalho é considerado um arranjo de antenas linear e uniforme, com elementos espaçados de meio comprimento de onda, cuja saída pode ser representada por uma combinação linear dos sinais capturados por seus M elementos:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{M-1} w_i x_i(k) \quad (3)$$

onde $x_i(k)$ é o sinal capturado pela i -ésima antena do arranjo e w_i é o ganho complexo conjugado associado. Desta forma (3) pode ser reescrita como:

$$y(k) = \mathbf{w}^H(k) \mathbf{x}(k) \quad (4)$$

onde \mathbf{w} é o vetor de pesos do arranjo, $\mathbf{x}(k)$ é o vetor de entrada e $(\cdot)^H$ é o operador transposição hermitiano. O objetivo é minimizar o erro quadrático médio (*Mean Square Error* – MSE), $\varepsilon(k)$, com respeito aos parâmetros do filtro espacial $\mathbf{w}(k)$,

$$\varepsilon(k) = E \left[|s_D(k) - y(k)|^2 \right] \quad (5)$$

Onde E é o operador esperança, $s_D(k)$ é a k -ésima amostra do sinal desejado, e $y(k)$ está relacionado ao processamento estritamente linear (SLP).

Buscando a determinação do filtro ótimo, Chevalier e Pincibono [18] propuseram o uso do sinal recebido e de seu complexo conjugado, abordagem atualmente conhecida como processamento largamente linear (WLP). O resultado da filtragem largamente linear passa a ser:

$$y(k) = \mathbf{w}_1^H \mathbf{x}(k) + \mathbf{w}_2^H \mathbf{x}^*(k) \quad (6)$$

onde \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 são os coeficientes complexos dos filtros.

Pelo princípio da ortogonalidade, para se determinar o valor mínimo do MSE é necessário, e suficiente, que os coeficientes do filtro ótimo sejam tais que o erro $\varepsilon(k)$ seja ortogonal às amostras do vetor de entrada do filtro.

Desta forma, $E[y^* \mathbf{x}] = E[s_D^* \mathbf{x}]$ e $E[y \mathbf{x}^*] = E[s_D \mathbf{x}^*]$. Após algumas manipulações algébricas, chega-se a:

$$\mathbf{R}_{xx} \mathbf{w}_1 + \mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_2 = \mathbf{r} \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_{xx} \mathbf{w}_1 + \mathbf{R}_{xx}^* \mathbf{w}_2 = \mathbf{z} \quad (8)$$

onde $\mathbf{C}_{xx} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^T]$, $\mathbf{r} = E[s_D^* \mathbf{x}]$ e $\mathbf{z} = E[s_D \mathbf{x}^*]$. A solução ótima para os coeficientes largamente lineares é:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= [\mathbf{R}_{xx} - \mathbf{C}_{xx}(\mathbf{R}_{xx}^*)^{-1} \mathbf{C}_{xx}^*]^{-1} [\mathbf{r} - \mathbf{C}_{xx}(\mathbf{R}_{xx}^{-1})^* \mathbf{z}^*] \\ \mathbf{w}_2 &= [\mathbf{R}_{xx}^* - \mathbf{C}_{xx}^* \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{C}_{xx}^*]^{-1} [\mathbf{z}^* - \mathbf{C}_{xx}^* \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{r}] \end{aligned} \quad (9)$$

A análise da solução de (9) permite concluir que, no pior caso, quando ambos \mathbf{C}_{xx} e \mathbf{z} são iguais a zero, o WLP apresenta um desempenho igual ao SLP. Uma discussão mais abrangente sobre cenários em que o WLP tem desempenho superior ao SLP pode ser encontrada em [16].

IV. ALGORITMO NCMA OTIMIZADO

No contexto de processamento largamente linear empregando arranjos de antenas foram propostos na literatura diversos algoritmos supervisionados e não supervisionados. Em grande parte das aplicações sem fio, GPS ou radar LPI são utilizados esquemas de modulação retilineares. Neste artigo busca-se otimizar o algoritmo NCMA no sentido de explorar as características dos sinais com modulação retilinear, que ofereça melhor desempenho e menor custo computacional que o original.

No processamento largamente linear, quando o sinal desejado é real, os termos \mathbf{r} e \mathbf{z} em (9) tem o mesmo valor, implicando que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_{WL}$, e consequentemente

$$y(k) = 2\Re(\mathbf{w}_{WL}^H \mathbf{x}) \quad (10)$$

onde \Re é o operador real. Pode-se escrever (10) como

$$y(k) = 2(\mathbf{w}_R^T \mathbf{x}_R + \mathbf{w}_I^T \mathbf{x}_I) \quad (11)$$

onde $\mathbf{w}_R = \Re(\mathbf{w}_{WL})$, $\mathbf{w}_I = \Im(\mathbf{w}_{WL})$, $\mathbf{x}_R = \Re(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}_I = \Im(\mathbf{x})$ e \Im é o operador imaginário.

Com estes pressupostos é possível obter a versão otimizada do algoritmo do módulo constante normalizado para sinais reticulados (Opt-NCMA-R).

De acordo com [17] e considerando (10), para se determinar o valor ótimo do passo de adaptação na equação de adaptação do CMA (1) é necessário definir dois tipos de erros:

- O erro *a priori* fornecido pelo filtro anterior no tempo k

$$e_1(k) = |y(k)|^2 - 1 = |\mathbf{w}_{WL}^H(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^H(k) \mathbf{w}_{WL}(k)|^2 - 1 \quad (12)$$

- O erro *a posteriori* fornecido pelo novo filtro no tempo k

$$e_2(k) = |\mathbf{w}_{WL}^H(k+1) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^H(k) \mathbf{w}_{WL}(k+1)|^2 - 1 \quad (13)$$

O objetivo é encontrar o passo adaptativo μ_{opt} para o qual

$$e_2(k) = 0, \quad \forall k \quad (14)$$

sabendo-se que a função custo é dada por $J = \{(|\mathbf{w}_{WL}^H(k+1) \mathbf{x}(k) + \mathbf{x}^H(k) \mathbf{w}_{WL}(k+1)|^2 - 1)^2\}$.

Deve-se encontrar o valor de $\mathbf{w}_{WL}(k+1)$ para o qual $\nabla J = 0$, ou seja

$$2\mathbf{w}_{k+1}^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{w}_{k+1} + \mathbf{w}_{k+1}^H \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{w}_{k+1}^* + \mathbf{w}_{k+1}^T \mathbf{x}^* \mathbf{x}^H \mathbf{w}_{k+1} = 0 \quad (15)$$

onde $\mathbf{w}_{k+1} = \mathbf{w}(k+1)$.

Substituindo-se em (15) o termo \mathbf{w}_{k+1} pela equação de adaptação apresentada em (1) obtêm-se a expressão para o passo adaptativo otimizado, expresso por

$$\mu_{opt}^2 \sigma^2(k) (y(k) + y^*(k))^2 - 2\mu_{opt} \sigma(k) y(k) (y(k) + y^*(k)) + 1 = 0 \quad (16)$$

onde

$$\sigma(k) = \mathbf{x}^H(k) \mathbf{x}(k) = \|\mathbf{x}(k)\|_2^2. \quad (17)$$

Resolvendo (16) em μ_{opt} o valor ótimo do passo adaptativo é

$$\mu_{opt} = \frac{|y(k)| - 1}{2E(k) y(k) (|y(k)|^2 - 1)}. \quad (18)$$

Substituindo (18) em (1) obtêm-se a expressão para o Opt-NCMA-R

$$\mathbf{w}_{WL}(k+1) = \mathbf{w}_{WL}(k) - \frac{1}{2\|\mathbf{x}(k)\|_2^2} \mathbf{x}(k) y(k) \left(1 - \frac{1}{|y(k)|}\right) \quad (19)$$

onde $y(k)$ é dado por (10).

V. SIMULAÇÕES

O objetivo das simulações apresentadas é avaliar o desempenho de um arranjo de antenas na tarefa de mitigação de interferentes quando da utilização do algoritmo Opt-NCMA-R. Para tanto, considera-se um cenário formado por um arranjo de 4 antenas omnidirecionais, uniformemente espaçadas de meio comprimento de onda. Este arranjo é iluminado por 1 sinal desejado reticular e de 3 a 7 sinais interferentes. A direção de chegada (DOA) em relação aos sinais interferentes é fixa e aquela relacionada ao sinal desejado varia de -90° to $+90^\circ$.

Em todas as simulações determinou-se que a relação sinal-ruído (SNR) é igual a +10dB e que todos os sinais incidem com a mesma potência.

Considera-se para cada simulação que o arranjo de antenas é iluminado por um diferente número de sinais incidentes, N_S que varia de 4 a 8. O sinal desejado, s_D tem modulação BPSK e os outros $N_S - 1$ sinais interferentes são 8-PAM, denominados s_1 a s_7 , e cujas direções de chegada (DOA) correspondem a $\pm 45^\circ$ (s_1 e s_2), $\pm 15^\circ$ (s_3 e s_4), $\pm 60^\circ$ (s_5 e s_6) e 0° (s_7). Na tabela I, são descritos quais são os sinais incidentes utilizados em cada simulação.

TABELA I CONJUNTO DE SINAIS EM CADA SIMULAÇÃO

N_S	SINAIS
4	$s_D s_1 s_2 s_3$
5	$s_D s_1 s_2 s_3 s_4$
6	$s_D s_1 s_2 s_3 s_4 s_5$
7	$s_D s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6$
8	$s_D s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7$

Na Fig. 1, é mostrada a taxa de erro de símbolo (SER) como função da direção de chegada s_D quando $N_S = 4$ para o algoritmo NCMA em sua versão estritamente linear (NCMA-SL) e otimizada (Opt-NCMA-R).

Nota-se claramente que o Opt-NCMA-R mitiga os sinais interferentes de maneira mais eficiente que o NCMA-SL para sinais que chegam de direções onde não ocorrem superposições de constelação. Naqueles ângulos que existem superposições observam-se valores elevados da taxa de erro de símbolo (SER) tanto para a versão estritamente linear quanto para a otimizada. Entretanto, para todas as outras direções de chegada, o algoritmo otimizado, Opt-NCMA-R, tem melhor desempenho na tarefa de mitigação de interferentes que o NCMA-SL e nestes casos podem ser verificados valores de SER próximos de zero.

Objetivando realizar uma comparação quantitativa do desempenho dos algoritmos foi avaliado o valor médio da taxa de erro de símbolo (SER) no intervalo completo de incidência de sinais, $-90^\circ \leq DOA \leq +90^\circ$, calculado como a área abaixo das curvas da Fig. 2. O mesmo procedimento foi adotado para os outros valores de N_S , levando a um conjunto de valores de SER via integração (ASER – Average SER). Estes resultados são mostrados na Fig. 2.

Quando $N_S = 4$ o arranjo de antenas opera em modo não sub-parametrizado. Neste caso, o Opt-NCMA-R apresenta um valor de ASER consideravelmente menor do que aquele apresentado pelo NCMA-SL. À medida que o número de sinais incidentes no arranjo aumenta, este passa a operar em modo sub-parametrizado. Como consequência, o NCMA-SL deixa de prover mitigação de interferentes, implicando que o sistema opera em uma situação próxima de erro total. Essa

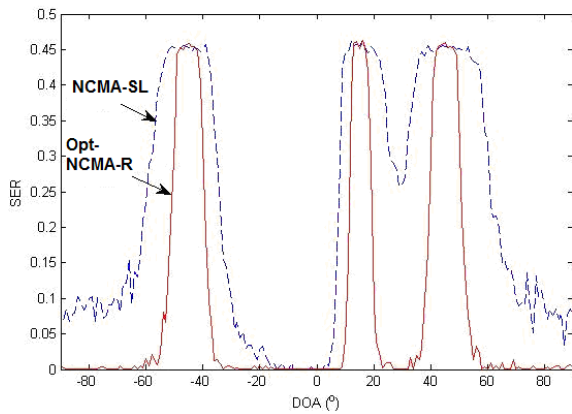


Fig. 1. SER do Opt-NCMA-R e NCMA-SL para $N_S = 4$

situação é evidenciada na Fig. 2 pelos valores de ASER próximos de 0,5 para o algoritmo NCMA-SL. Essa condição de operação próxima de erro total persiste independentemente do número de interferentes a partir do momento em que o arranjo opera em modo sub-parametrizado.

Por outro lado, aumentando-se o número de sinais incidentes, o algoritmo Opt-NCMA-R ainda provê mitigação de interferentes, mesmo com o arranjo operando em modo sub-parametrizado. Neste caso, os valores de ASER aumentam linearmente com o número de sinais incidentes, até atingir um valor semelhante ao obtido pelo algoritmo NCMA-SL para $N_S = 8$. Para o algoritmo Opt-NCMA-R, os valores de ASER estão diretamente relacionados ao número de superposições de constelação que ocorrem à medida que o DOA do sinal desejado s_D é variado. Assim, para $N_S = 4$, tem-se 3 superposições, como se observa na Fig. 1, para $N_S = 5$ tem-se 4 superposições e assim sucessivamente até 7 superposições quando $N_S = 8$. Esse relacionamento entre o número de sinais incidentes no arranjo e o valor de ASER explica o comportamento linear mostrado na Fig. 2 para o algoritmo Opt-NCMA-R.

VI. CONCLUSÕES

Com o objetivo de otimizar o desempenho do algoritmo cego NCMA para casos em que o sinal desejado é retilinear, foram propostas neste trabalho modificações em sua função custo, baseando-se nas características reais do sinal desejado e nas técnicas do processamento largamente linear. Essas modificações levaram ao novo algoritmo cego Opt-NCMA-R, que é otimizado para cenários em que o sinal desejado é retilinear, apresentando maior simplicidade matemática que o algoritmo NCMA original.

A fim de se comparar os desempenhos do algoritmo proposto Opt-NCMA-R com o algoritmo NCMA original, foi realizado um conjunto de simulações em que se considerou a tarefa de mitigação de interferentes através de um arranjo de antenas sobre o qual um número variável de sinais incidia.

Nos resultados, mostrou-se que o algoritmo Opt-NCMA-R apresenta desempenho superior ao NCMA original para estas situações, especialmente quando o arranjo de antenas opera em modo sub-parametrizado, ou seja, com mais sinais incidentes do que antenas.

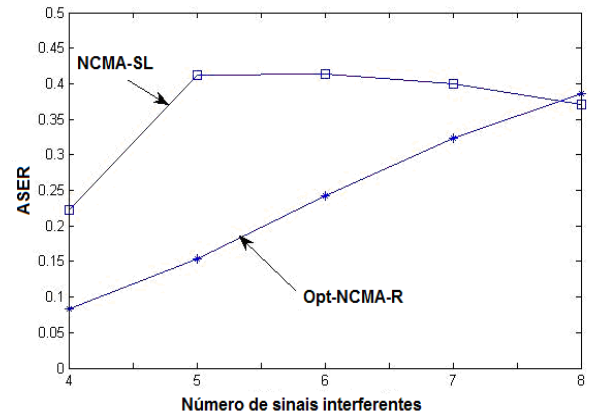


Fig. 2. ASER para Opt-NCMA-R e NCMA-SL

REFERÊNCIAS

- [1] L.C. Godara, "Application on antenna arrays to mobile communications: part II. beam-forming and direction of arrival considerations", Proc. IEEE, vol.85, p.1195-1245, 1997.
- [2] J. C. Liberti, T. S. Rappaport, Smart Antennas for Wireless communications IS-95 and Third Generation CDMA applications, Prentice Hall, 1999.
- [3] P. E. Pace, Detecting and Classifying Low Probability of Intercept Radar, Artech House, 2004.
- [4] S. Haykin (Eds.), Unsupervised Adaptive Filtering, John Wiley & Sons, NY, 2000.
- [5] D. N. Godard, "Self-recovering equalization and carrier tracking in a two-dimensional data communication system" IEEE Trans. Communications, vol. 28, p. 1867-1875, Novembro 1980.
- [6] J. R. Treicher, B.G. Agee, "A new approach to multipath correction of constant modulus signals" IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, vol. 31, pp. 459-471, Abril 1983.
- [7] S. Haykin (EDS.), Blind Deconvolution, Prentice Hall, NJ, 1994.
- [8] S. Haykin, Adaptive Filter Theory, Prentice Hall, NJ, 1996.
- [9] A. J. van der Veen, A. Paulraj, "An analytic constant modulus algorithm", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 49, p. 1796-1807, Agosto 2001.
- [10] P. A. Regalia, "A finite-interval constant modulus algorithm" ICASSP 2002, IEEE International Conference on acoustics, Speech and Signal Processing, p. 2285-2288, 2002.
- [11] K. N. Oh, Y. O. Chin, "Modified constant modulus algorithm: blind equalization and carrier phase recovery algorithm", IEEE International Conference on Communications p. 498-502, 1995.
- [12] A. Bouachn, F. Debbat, F.T. Bendimerad, "Modified blind beamforming algorithm for smart antenna system", Journal of Radio Electronics, n.1, 2008.
- [13] W. M. Brown, R. B. Crane, "Conjugate Linear Filtering", IEEE Trans. on Communications, 51(1), p. 37-42, Janeiro 2003.
- [14] P. Chevalier, A. Blin, "Widely linear MVDR beamformers for the reception of an unknown signal corrupted by noncircular interferences" IEEE Trans. Signal Processing, vol. 55, n.11, p.5323-5355, Novembro 2007.
- [15] A. Chinatto, C. Junqueira, J.M.T. Romano, "Interference mitigation using widely linear arrays", 17th European Signal Processing Conference, Eusipco 2009, Agosto 2009.
- [16] P. Chevalier, F. Picon, "New Insights Into Optimal Widely Linear Array Receivers for the Demodulation of BPSK, MSK, and GMSK Signals Corrupted by Noncircular Interferences — Application to SAIC", IEEE Trans on Signal Processing, vol. 54, n. 3, p. 11-25, Março 2006.
- [17] K. Hilal, P. Duhamel, "A convergence study of the constant modulus algorithm leading to a normalized-CMA and a block-normalized-CMA" Signal Processing VI: Theories and Applications, p. 135-138, 1992.
- [18] P. Chevalier, B. Picinbono, "Widely Linear Estimation with Complex Data" IEEE Trans on Signal Processing, vol. 43, n. 8, p. 2030-2033, Agosto 1995.