XII SIGE ISSN: 1983 7402 São José dos Campos, 28 de setembro a 01 de outubro de 2010

O Problema do Transporte de Carga em Consumo no Veículo Transportador

Rodolfo Ranck Júnior
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE. Caixa Postal 515 – 12.227-010 – São José dos Campos – SP – Brasil

***Resumo* — Neste trabalho aborda-se o problema de um veículo que deve transportar uma quantidade de carga para um ponto distante da origem. Essa carga é submetida a um consumo dado em função da distância percorrida no transporte. Existem depósitos espalhados entre os pontos de início e destino, onde o veículo pode estrategicamente deixar parte de sua carga e recolhe-las em um momento oportuno. O objetivo é minimizar a carga total consumida, a distância total percorrida e custos com o uso de depósitos. Esse problema pode surgir em, por exemplo, situações emergenciais e de guerra onde pode haver falta de recursos de transporte e de fontes para abastecer o veículo ao longo da rota. Formula-se um procedimento para, em um caso especial, gerar a melhor solução para um caminho viável conhecido e apresentam-se exemplos para esse caso utilizando pequenas instâncias do problema. Uma formulação de programação linear mista também é apresentada.**

***Palavras-Chave* — Problema do Transporte com Consumo, Otimização Combinatória.**

I. INTRODUÇÃO

Considere um veículo de capacidade limitada que deve transportar uma quantidade de carga à determinada região (ponto de demanda) distante do ponto de origem (ponto de fornecimento). A carga, quando no veículo, é consumida continuamente em função da distância percorrida por ele e pode ser dividida em partes de qualquer tamanho. A capacidade do veículo é menor do que a capacidade necessária para transportar toda carga demandada de uma única vez (apenas em uma viagem) do ponto de origem ao ponto de destino. No caminho, entre os pontos de fornecimento e demanda, existem pontos de depósito onde o veículo pode estrategicamente deixar uma parcela de sua carga para que, posteriormente, não precise mais voltar ao ponto de fornecimento para ser reabastecido. Para transportar uma carga entre dois pontos o veículo pode realizar diversas viagens entre eles. Uma carga pode ficar abrigada em um ponto de depósito até que o veículo retire-a de lá. Conhecidos os valores de capacidade de carga, capacidade dos depósitos, consumo do veículo, localização das bases, e ainda a quantidade de carga demandada, pergunta-se: como minimizar os custos no atendimento da demanda? Admite-se que estes custos são dados pelo total de carga consumida, total de distância percorrida pelo veículo e custos com a utilização dos depósitos.

O Problema do Transporte de Carga em Consumo no Veículo Transportador (PTCCVT) pode surgir em casos de calamidade pública, de guerras, em situações onde o trajeto entre os pontos de demanda e fornecimento seja de risco, em regiões remotas e/ou inóspitas e em outros casos emergenciais em que os recursos de transporte e de fornecimento de carga sejam escassos e precários.

A carga pode ser consumida de diferentes maneiras, por exemplo, pelo próprio veículo transportador para que ele possa locomover-se e, neste caso, a carga (propulsor) pode ser um combustível, energia elétrica, água, etc. A carga pode ser consumida também quando há falta de recursos para o seu acondicionamento, tornando-a volátil.

A natureza do consumo da carga pode ser determinante na solução de uma instância do PTCCVT. Neste trabalho, trata-se deste consumo em dois casos: quando a carga demandada é um propulsor e quando não. Em ambos os casos considera-se que há apenas um tipo de carga demandada. Caso a carga seja um propulsor pode ser necessário não descarregá-la completamente do veículo, possibilitando a ida deste veículo a algum outro ponto em busca de mais carga. Caso contrário, a carga pode ser totalmente descarregada e admite-se que o propulsor do veículo não constitui um problema.

No PTCCVT, um veículo partindo de um ponto atual pode não conseguir transportar carga ao ponto de demanda de maneira direta (sem utilizar algum ponto intermediário), pois esta carga pode ser totalmente consumida antes mesmo de chegar ao seu destino. Para realizar um transporte entre esses pontos, uma possível alternativa é primeiramente transportar parte da carga para um ponto de depósito que esteja próximo o suficiente do ponto atual. Com a carga acumulada neste depósito pode-se tornar possível a partir dele transportar carga ao ponto de demanda de maneira direta, ou então, ser necessário transportar parte da carga a um novo depósito (veja Exemplo 1 em §II).

Mesmo no caso em que é possível transportar carga diretamente de um ponto para outro, existe ainda uma preocupação com a quantidade de carga consumida neste transporte. Para minimizar esta quantidade pode ser interessante o uso de depósitos intermediários a esses pontos (veja Exemplo 2 em §II).

O PTCCVT pode ser modelado como um problema de fluxo em redes. Seja V=$\{i | i \epsilon \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\}$ o conjunto dos nós, em que i=1 é o ponto de fornecimento, i=n é o ponto de demanda, i=2,3,...,n-1 são depósitos, n é o número total de nós; E={1,2,...,u} o conjunto das arestas; e F=$\{f_1, f_2, \dots, f_z\}$ o conjunto dos fluxos nas arestas. Define-se uma rede (E, V, F) como um grafo completo e direcionado G (E, F). Nesta rede, o nó i=1 dispõe de uma quantidade positiva de carga q qual se admite ser suficiente para atender a demanda do problema. Um nó depósito i possui uma capacidade l_i e um custo fixo c_i com sua utilização. A demanda do nó n é denotada por b_n e deve ser totalmente atendida. O veículo tem uma capacidade cap, um consumo de carga C (unidade de carga/unidade de distância) associado a ele e deve partir do nó i=1. Deseja-se encontrar quais são as quantidades

Rodolfo Ranck Júnior. rodolforanck@gmail.com, Tel +55-11-8932-8932. O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – Brasil. O autor agradece os revisores deste trabalho por suas valiosas sugestões.

transportadas diretamente de cada nó i=1,...,n-1, para cada nó j=2,...,n, de maneira que a demanda b_n seja atendida a custo mínimo.

Em problemas de fluxo em redes busca-se determinar um fluxo de produtos entre pontos de oferta e pontos de demanda sujeito a um conjunto de restrições e uma função objetivo. Uma possível restrição para esses problemas é impor que a resultante de todo o fluxo em um nó (que entra, que sai e o que é utilizado) seja igual a zero e um possível objetivo é minimizar o tamanho total do caminho entre os nós de início e destino em uma rede. Problemas de fluxo em redes surgem em diversas situações práticas em que há interesse no transporte de uma quantidade de produto para um ou mais pontos distantes da origem (veja, por exemplo, [1-3]) e também em casos diversos, em que o fluxo em uma rede é apenas uma abstração, por exemplo, os problemas de designação e os problemas de localização (veja mais em [4-6] e [7-9], respectivamente). A Figura 1 apresenta uma classificação de problemas em Fluxo de Redes (cf. [2]).

Fig. 1 – Classificação de problemas de Fluxo em Redes (cf. [2]).

Até a data de submissão deste artigo não se encontrou nenhum trabalho da literatura científica que aborde o PTCCVT. No entanto, pode-se considerá-lo como um problema de fluxo a custo mínimo.

No problema de fluxo a custo mínimo deseja-se encontrar um menor fluxo entre os nós de fornecimento e os nós de destino e normalmente existe um valor máximo e mínimo de fluxo que pode passar pelas arestas da rede. No que se conhece, um dos primeiros estudos que abordam esse problema aparecem nos trabalhos de [10] e [11]. Em [12] pode-se encontrar uma extensa revisão, análise e métodos de solução para esse problema e para algumas de suas especializações. Veja outros trabalhos mais recentes que tratam desse problema em, por exemplo, [1] e [13-16].

II. PROCEDIMENTO PARA A GERAÇÃO DA MELHOR SOLUÇÃO PARA UM CAMINHO VIÁVEL EM UM CASO ESPECIAL

Considere um caminho viável para uma instância do PTCCVT aquele pelo qual se pode construir uma solução viável para esta instância. Seja um caminho viável para uma instância deste problema dado por uma sequência de r nós distintos $S = [s_1, s_2, \dots, s_r] \mid 2 \le r \le n$, em que s_1 é o nó de origem e s_r o nó de destino. Uma vez que não é vantajoso deixar alguma carga nos depósitos, pode-se considerar que o total de carga transportada para um nó s_{i+1} é o total de carga disponível em s_i menos o total de carga consumido nesse transporte. Considerando ainda que a carga transportada de s_{r-1} para s_r deve atender a demanda do problema, então, para esse caso especial, o total de carga transportada diretamente de um nó s_{i-1} a um nó s_i, $i = r, \dots, 2$ pode ser calculado pela relação de recorrência (1).

$$\begin{cases} x_{s_{r-1},s_r} = b_n \\ x_{s_{i-1},s_i} = x_{s_i,s_{i+1}} + g_{s_i,s_{i+1}}, \qquad i = r-1,\dots,2 \mid r > 2 \end{cases} \tag{1}$$

em que:

x_{ij} é o total de carga transportada diretamente de i para j;

g_{ij} é o total de carga consumida para transportar uma quantidade de carga x_{ij}.

Para o caminho S, o valor de g_{s_{i-1},s_i} pode ser dado pelo total de carga consumida entre os nós s_{i-1} e s_i, $i = r, \dots, 2$ com viagens de ida e volta (indo de s_{i-1} diretamente a s_i e retornando deste nó diretamente a s_{i-1}) e com uma viagem de ida (indo de s_{i-1} diretamente a s_i). Veja (2).

Uma maneira de obter um valor mínimo para g_{s_{i-1},s_i}, $i = 2, \dots, r$ é transportar x_{s_{i-1},s_i}, $i = 2, \dots, r$ percorrendo um mínimo de distância com o veículo, uma vez que a carga é consumida em função dessa distância. Para obter esse mínimo, é suficiente transportar a carga entre cada par de nós adjacentes do caminho S com uma viagem de ida levando a maior quantidade de carga possível (4) e com um número mínimo de viagens de ida e volta (5) para transportar o restante da carga. Para as relações (2)-(7) considere $i = 2, \dots, r$.

$$g_{s_{i-1},s_i} = g'_{s_{i-1},s_i} + g''_{s_{i-1},s_i}, \qquad cap - tL_{s_{i-1},s_i} > 0 \tag{2}$$

$$g'_{s_{i-1},s_i} = tL_{s_{i-1},s_i}, \qquad cap - tL_{s_{i-1},s_i} > 0 \tag{3}$$

$$t_{s_{i-1},s_i} = \min\{x_{s_{i-1},s_i}, (cap - tL_{s_{i-1},s_i})\}, cap - tL_{s_{i-1},s_i} > 0 \tag{4}$$

$$nV''_{s_{i-1},s_i} = \left\lceil \frac{x_{s_{i-1},s_i} - t_{s_{i-1},s_i}}{cap - \beta tL_{ij}} \right\rceil, \qquad cap - \beta tL_{s_{i-1},s_i} > 0 \tag{5}$$

$$g''_{s_{i-1},s_i} = \begin{cases} \beta tL_{ij}\, nV''_{s_{i-1},s_i}, & cap - \beta tL_{ij} > 0 \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \tag{6}$$

em que:

g'_{ij} é o total de carga consumida para transportar diretamente uma quantidade de carga do nó i ao nó j quando não é necessário voltar a i;

g''_{ij} é o total de carga consumida para transportar diretamente uma quantidade de carga do nó i ao nó j quando é necessário voltar a i;

nV''_{ij} é uma variável que determina o número de viagens de ida e volta que um veículo deve fazer para transportar uma quantidade de carga x_{ij};

t_{ij} é a quantidade de carga transportada diretamente de i para j quando não é necessário voltar a i;

tL_{ij} é o total de carga consumida para percorrer a aresta (i, j) uma única vez:

$$tL_{ij} = d_{ij}\, C, \qquad i = 0, \dots, n;\ j = 1, \dots, n;\ i \ne j \tag{7}$$

d_{ij} é a distância entre os nós i e j;

β é um parâmetro que recebe valor 2 se a carga transportada é um propulsor e 1 caso contrário (Veja §I).

Note que como o caminho S é viável, $cap - tL_{s_{i-1},s_i} > 0$, $i = 2, \dots, r$, e, neste caso, pelo menos as relações (2)-(4) são válidas.

Observe que, mesmo se viáveis, nem todos os caminhos possuem a propriedade do caminho S. Por exemplo, devido aos limites de capacidade impostos para os depósitos, pode ser necessário transportar carga diretamente de um nó para mais de um nó distinto, não valendo as relações (1)-(7).

A seguir, apresentam-se exemplares que possuem pelo menos um caminho viável com as propriedades do caminho S.

A. *Exemplo 1*

Seja uma instância do PTCCVT com *n*=4, *cap=60*, *C*=10, b_n=200 e, por simplicidade, $l_i = +\infty$, *i=1,...,n*. A carga sendo transportada é um propulsor para o veículo. A matriz de distâncias entre cada par de nós do problema é dada por D a seguir:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 4{,}3 & 2{,}5 & 6 \\ 4{,}3 & 0 & 2{,}3 & 2 \\ 2{,}5 & 2{,}3 & 0 & 3{,}6 \\ 6 & 2 & 3{,}6 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que não é possível transportar diretamente carga ao ponto de demanda (nó 4) a partir do ponto de fornecimento (nó 1), pois uma viagem entre esses nós consumiria $C*d_{14}$= 60 unidades de carga, que é maior ou igual a *cap*. Para transportar carga ao nó 4 é necessário estocar antes uma quantidade suficiente dela em um depósito mais próximo desse nó. Para efeito de exemplo, verifiquemos a possibilidade de transportar carga do nó 1 ao nó 2. Partindo do nó 1 com o veículo totalmente carregado, pode-se chegar ao nó 2 com *cap* - $C*d_{12}$ = 17 unidades de carga. Considerando que será necessário voltar ao nó 1 para buscar mais carga e que a carga é um propulsor, essa alternativa não é viável, pois esse retorno demandaria $C*d_{21} = 43$ unidades de carga, menos do que estaria disponível no veículo.

Verifica-se agora outra alternativa. Partindo do nó 1 pode-se chegar ao nó 3 com *cap*-$C*d_{13}$= 35 unidades de carga, uma quantidade suficiente para que parte dela possa ser deixada no nó 3 e ainda seja possível voltar ao nó 1; portanto, esta alternativa é viável. Quando é necessário voltar, pode-se transportar do nó 1 ao 3 até *cap*-2*$C*d_{13}$=10 unidades de carga, e quando não, pode-se transportar até *cap*-$C*d_{13}$=35 unidades de carga.

Seguindo a sistemática anterior, a partir do nó 3 pode-se transportar carga para o nó 2 e por fim do nó 2 ao 4, ambas alternativas viáveis. A Fig. 2 apresenta o caminho viável gerado para esse exemplo 1.

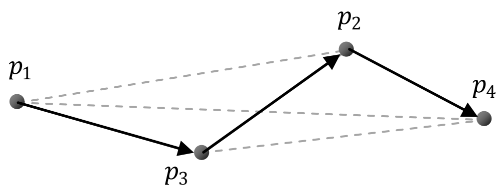

Fig. 2 – Um possível caminho para o exemplo 1.

Para resolver o exemplo 1, ainda resta saber as quantidades transportadas diretamente entre cada par de nós adjacentes do caminho viável $S_{exemplo\ 1} = [1, 3, 2, 4]$. Essas quantidades são obtidas utilizando as relações (1-7) e são apresentadas a seguir: $x_{1,3} = 2.219$; $x_{3,2} = 540$; $x_{2,4} = 200$. Pelas mesmas relações, as quantidades de carga gastas para este exemplo são: $g_{1,3} = 10.975$; $g_{3,2} = 1.679$; $g_{2,4} = 340$. Totalizando 12.994 unidades de carga.

B. *Exemplo 2*

Considere neste exemplo *cap*=121 e todos os outros parâmetros iguais aos do Exemplo 1. Com esse valor de capacidade, é possível transportar toda carga necessária sem utilizar nenhum depósito, ou seja, o caminho $S_{exemplo\ 2} = (1, 4)$ é viável. Pelas relações (1-7), tem-se que a melhor solução com esse caminho gastaria uma quantidade de carga $g_{1,4}$=16.740. No entanto, uma solução alternativa através do caminho também viável $S'_{exemplo\ 2} = (1, 3, 4)$ gastaria apenas $g_{1,3} + g_{3,4}$ =577 unidades de carga.

III. Um Modelo Matemático para o PTCCVT

A seguir formula-se o PTCCVT como um problema de programação linear mista (8-23). Neste modelo considera-se um problema mais geral, possibilitando que os depósitos também demandem alguma quantidade de carga.

$$min\ z = \sum_{i \in M} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} \omega_1 g_{ij} + \omega_2 d_{ij} \left(nV'_{ij} + 2nV''_{ij}\right) + \sum_{i \in L} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} c_i nV'_{ij} \quad (8)$$

$$x_{ij} = t_{ij} + nV''_{ij}\, a''_{ij} \left(cap - \beta tL_{ij}\right), \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (9)$$

$$t_{ij} \leq a'_{ij} \left(cap - tL_{ij}\right), \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (10)$$

$$nV'_{ij} \geq \frac{t_{ij}}{t_{ij} + \delta}, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (11)$$

$$g_{ij} = tL_{ij} \left(nV'_{ij} + \beta nV''_{ij}\right), \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (12)$$

$$\sum_{i \in M} x_{ij} = b_j + \sum_{k \in N} \left(x_{jk} + g_{jk}\right), \quad j \in N;\ i \neq j; j \neq k \quad (13)$$

$$\sum_{j \in N} x_{1j} \leq q \quad (14)$$

$$\sum_{j \in N} nV'_{ij} \leq 1, \quad i \in M \quad (15)$$

$$\sum_{i \in M} nV''_{ij}\, a''_{ij} \left(cap - \beta tL_{ij}\right) \leq l_j, \quad j \in N;\ i \neq j \quad (16)$$

$$nV'_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (17)$$

$$g_{ij} \in \mathbb{R}^+, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (18)$$

$$nV''_{ij} \in \mathbb{N}, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (19)$$

$$t_{ij} \in \mathbb{R}^+, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (20)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{R}^+, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (21)$$

em que:

$$tL_{ij} = d_{ij} C_{ij}, \quad i \in M;\ j \in N;\ i \neq j \quad (22)$$

$$L = \{2, \dots n-1\} \quad (23)$$

$$M = \{1, \dots n-1\} \quad (24)$$

$$N = \{2, \dots n\} \quad (25)$$

a'_{ij} é uma matriz que toma o valor 1 se o veículo pode transportar uma quantidade de carga positiva do nó *i* diretamente ao nó *j* e 0 caso contrário:

$$a'_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ Tl_{ij} < cap \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \quad (26)$$

$a"_{ij}$ é uma matriz que toma o valor 1 se o veículo pode transportar uma quantidade de carga positiva do nó i diretamente ao nó j e retornar ao nó i, e 0 caso contrário:

$$a"_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ \beta Tl_{ij} < cap \\ 0, & caso\ contrário \end{cases} \quad (27)$$

b_i é a quantidade de carga demandada pelo nó i;
C_{ij} é o consumo do veículo ao transportar diretamente alguma carga do nó i ao nó j;
nV'_{ij} é uma variável binária que toma valor 1 se alguma quantidade de carga é transportada diretamente de i para j e 0 caso contrário;
q é o total de carga disponível na origem;
δ parâmetro para não permitir que o denominador na restrição (11) tenha valor zero. Seu valor pode ser dado por qualquer valor positivo;
ω_1 custo por unidade de carga consumida;
ω_2 custo por unidade de distância percorrida;
e os demais parâmetros e variáveis iguais aos definidos anteriormente.

Em (8), a função objetivo minimiza o total de carga consumida com transporte, a distância total percorrida e o custo com a utilização dos depósitos, que respectivamente correspondem ao 1º, 2º e 3º termo da função objetivo. A restrição (9) impõe que x_{ij} deve ser composto pelo total transportado com viagens de ida e volta mais o total transportado em uma viagem de ida. A restrição (10) impõe que só será transportada diretamente alguma quantidade de carga do nó i ao nó j, se o veículo for capaz de sair de i e chegar em j diretamente com alguma quantidade de carga. Essa quantidade deve ser no máximo a capacidade de carga do veículo menos o total de carga consumida nessa viagem. A restrição (11) impõe que nV'_{ij} será igual a 1 apenas se $t_{ij} > 0$ e 0 caso contrário. A restrição (12) impõe que o total de carga consumida no transporte de x_{ij} seja a quantidade total de carga consumida em cada viagem multiplicada pelo total de viagens em que a carga está no veículo. A restrição (13) impõe que o total de carga demandado pelo nó j mais o total de carga transportado a partir desse nó e o total de carga consumida com esse transporte seja igual ao total de carga disponível no nó j. A restrição (14) impõe que o total de carga transportado para o nó j diretamente do nó de origem seja menor ou igual à quantidade de disponível no nó de origem. A restrição (15) impõe que o veículo pode no máximo fazer uma única viagem de ida a partir de um nó i. A restrição (16) impõe um limite para o máximo de carga que pode ser armazenado em um depósito. Considera-se que toda a carga transportada em uma única viagem a um ponto de depósito não precisa ser descarregada do veículo e, portanto, não precisa ser armazenada nesse depósito. As restrições (17)-(21) definem o domínio das variáveis de decisão.

Observe que quando C_{ij}, $i \in$ M; $j \in$ N; $i \neq j$ é constante, para minimizar o total de carga consumida, bastaria minimizar a distância total percorrida pelo veículo. Observe também que como toda carga deve partir do nó 1, então para minimizar o total de carga consumida, bastaria minimizar o total de carga levado desse nó: $\sum_{\substack{j \in N \\ j \neq 1}} \omega_1 g_{1j} + x_{1j}$.

IV. Conclusão e Sugestões de Trabalhos Futuros

No que se conhece o PTCCVT é inédito na literatura e com este trabalho apresentou-se uma descrição formal, alguns resultados teóricos e também um modelo matemático de otimização para este problema. O procedimento proposto em §2 pode ser útil no desenvolvimento de heurísticas para o PTCCVT, pois pode construir rapidamente soluções a partir de um caminho viável com as propriedades do caminho S (ver §2). O fato de o PTCCVT ter sido modelado como um problema de programação linear possibilita tentar resolvê-lo por softwares consagrados como o CPLEX [17].

Para trabalhos futuros abordando o PTCCVT sugere-se: estender este problema para o caso em que se dispõe de mais de um veículo, para o caso em que o veículo deve voltar ao nó de origem depois de atendida a demanda e para o caso em que a carga demandada não está em consumo no veículo, apenas o propulsor; estender o procedimento proposto para um caso mais geral, por exemplo, quando os depósitos são capacitados; executar testes computacionais para verificar a viabilidade em resolver o PTCCVT formulado como (8-25) de maneira exata; estudar métodos de solução para este problema.

Referências

[1] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, e J. Orlin, Network Flows: theory, algorithms, and applications , Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1993.
[2] M.C, Goldbarg, H. Pacca Luna, Otimização combinatória e programação linear. Rio de Janeiro: Campus, 2000.
[3] M. Ghatee, S. Mehdi Hashemi, M. Zarepisheh, E. Khorram, “Preemptive priority-based algorithms for fuzzy minimal cost flow problem: an application in hazardous materials transportation”, Computers & Industrial Engineering, vol. 57, p.341-354, Agosto 2009.
[4] M. L. Fisher, R. Jaikumar, “A generalized assignment heuristic for vehicle routing”, Networks, vol. 11, p. 109-124, 1981.
[5] D. Catrysse, L. N., Van Wassenhove, “A survey of algorithms for the Generalized Assignment Problem”, European Journal of Operational Research, vol. 60, p. 260-273, 1992.
[6] J. Nowakovski, J.; W. Schwärzler, E. Triesch. “Using the generalized assignment problem inscheduling the ROSAT space telescope”. European Journal of Operational Research, vol. 112, p. 531-541, 1999.
[7] M. Daskin, Network and Discrete Location: Models, Algorithms and Applications, Wiley Interscience, New York, EUA, 1995.
[8] Drezner, Z. (ed.) Facility Location: A Survey of Applications and Methods, Springer-Verlag, NY, 1995
[9] Ranck Junior, R. “O Problema da Cobertura de Conjuntos com Facilidades Alocadas à P-medianas”, Anais do XI SIGE, p.266-269. São José dos Campos, 2009.
[10] T.E. Bartlett, An algorithm for the minimum number of transport units to maintain a fixed schedule, Naval Research Logistics Quarterly 4 (1957), p. 139-149.
[11] G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, Notes on Linear Programming: part XV minimizing the number of carriers to meet a fixed schedule, Research Memorandum, RM-1328, The RAND Corp., Santa Monica, CA. [published in Naval Research Logistics Quarterly 1(1954) p.217-222].
[12] L. R. Ford, D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, 1962.
[13] Y. L. Chen, “The minimal average cost flow problem”, European Journal of Operational Research, vol. 81, p.561-570, Março 1995
[14] H. Shih, E. Stanley Lee, “Fuzzy multi-level minimum cost flow problems”, Fuzzy Sets and Systems, vol. 107, p.159-176, Outubro 1999
[15] X. Cai, D. Sha, C. K. Wong, “Time-varying minimum cost flow problems”, Europ. Jour. of Oper. Res. vol. 131, p.352-374, Junho 2001.
[16] A. Raith, M. Ehrgott, “A two-phase algorithm for the biobjective integer minimum cost flow problem”, Computers & Operations Research, vol. 36, p. 1945-1954, Junho 2009
[17] ILOG CPLEX 11.0. “User´s Manual”. Ilog Inc., p.532. Paris, France, Ilog, 2007. http://www.ilog.com. Acessado em: 12 Dez. 2008.