

Propriedades de Transmissão de Linhas LC Duplamente Periódicas

Ana Flávia G. Greco¹, Joaquim J. Barroso e José O. Rossi

Laboratório Associado de Plasma
Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
São José dos Campos, SP - Brasil
¹anaflaviaguedesgreco@gmail.com

Resumo — Em uma formulação geral descrita por um sistema de equações diferenciais ordinárias no domínio do tempo, o presente trabalho investiga os processos de transmissão e filtragem em linhas de transmissão LC duplamente periódicas. A formulação desenvolvida permite incluir um número arbitrário de seções pares e ímpares que serão identificadas por dois conjuntos de elementos reativos $\{L_2, C_2\}$ e $\{L_1, C_1\}$, respectivamente. As linhas assim sintetizadas com elementos concentrados exibem forte dispersão espacial em que cada nó da linha apresenta um espectro distinto de frequência. Resultados numéricos considerando elementos reativos com valores típicos de $1 \mu\text{F}$ e $1 \mu\text{H}$ em linhas de 200 seções e excitadas com pulsos retangulares de $5 \mu\text{s}$ de largura são analisados e discutidos, destacando-se o caráter de filtragem espacial das linhas.

Palavras-Chave — linhas de transmissão duplamente periódicas, elementos concentrados, dispersão espacial.

I. INTRODUÇÃO

Devido ao rápido avanço da tecnologia de circuitos eletrônicos demandando um contínuo aumento na velocidade de sinais, interconexões entre dispositivos eletrônicos podem se comportar como linhas de transmissão. Atrasos não intencionais de sinais, tensões de crosstalk, reflexões e sobretensões de sinais nas terminações dos componentes prejudicam a correta operação de circuitos eletrônicos. Para confrontar tais problemas em processamento digital de alta velocidade, há necessidade de reduzir o atraso de propagação de sinais entre os elementos do circuito [1]-[2]. Nesse sentido, para o projeto e testes de tais componentes, técnicas acuradas e eficientes de simulação são requeridas, e tais análises devem ser realizadas no domínio do tempo. Este requisito torna-se importante em linhas de transmissão de sistemas de potência para a avaliação de processos transitórios, excitados sejam por campos eletromagnéticos externos, por emissão de radares de alta potência ou por descargas de raios.

Linhas de transmissão são amplamente usadas na conexão de rádio transmissores e receptores com antenas e também na distribuição de sinais entre sistemas de comunicação. Além disso, apresentando a habilidade de manipular e conformar sinais de alta potência com a finalidade de concentrar e liberar pulsos intensos de energia utilizando sistemas compactos e de dimensões reduzidas, linhas de transmissão de potência pulsada constituem uma tecnologia de interesse para o sistema de defesa.

A diferença essencial entre linhas de transmissão e circuitos de elementos concentrados refere-se ao comprimento elétrico. Análise de circuitos considera que as dimensões físicas de uma rede de circuitos sejam muito menores que o comprimento de onda elétrico, enquanto linhas de transmissão podem ter uma extensão de muitos comprimentos de onda. Desta forma, uma linha de transmissão é uma rede de elementos distribuídos onde a tensão e a corrente variam em magnitude e fase em toda a sua extensão e, assim, conexões com fios devem ser tratadas como linhas de transmissão quando o seu comprimento elétrico torna-se comparável ao comprimento de onda.

Por outro lado, numa rede periódica de elementos concentrados pode ser considerada uma linha de transmissão homogênea (ou contínua) quando o comprimento elétrico de cada célula unitária satisfaz $d < \lambda/2$, onde d é o número de onda gerado e d o comprimento físico de cada célula, ou equivalentemente $d < \lambda/4$. Esta condição também assegura a ausência de ressonâncias de Bragg ao longo das descontinuidades da linha [3]-[4], que se comporta como uma linha de transmissão contínua uma vez que o comprimento de onda, λ , é apreciavelmente maior que a escala discreta dos elementos do circuito elétrico.

No outro limite, em que as frequências são suficientemente altas tal que o comprimento de onda é comparável ao tamanho da seção unitária, o sinal propaga-se como uma onda ao longo da linha porque a tensão e corrente não podem variar instantaneamente em todos os nós da rede discreta e, portanto, não se podem desprezar as propriedades capacitivas e indutivas dos fios.

Deve-se destacar que o comportamento de uma linha de transmissão é descrito por equações diferenciais parciais da classe hiperbólica, enquanto as equações de circuitos de elementos concentrados, com tensões em cada nó e correntes fluindo nos ramos, são equações diferenciais ordinárias sistematizadas pelas leis de Kirchhoff [5].

Do exposto, o presente trabalho trata da análise no domínio do tempo de linhas de transmissão com elementos concentrados. A topologia da linha considerada é estruturada por células LC formando uma rede com um número qualquer de seções N , seja $N = 10$ ou $N = 400$. O sistema de equações diferenciais ordinárias para a análise no domínio do tempo é escrito em uma formulação geral para que a cada elemento discreto em uma seção particular i , possam ser atribuídos valores arbitrários L_i e C_i . O estudo aqui desenvolvido

concentra-se na investigação das características de propagação de linhas duplamente periódicas onde cada seção ímpar compõe-se de um par de elementos L_1 e C_1 , enquanto as seções pares incluem um indutor L_2 e um capacitor C_2 . Na atribuição dos valores dos elementos do circuito dois casos são considerados. No primeiro, a linha de transmissão discreta é constituída com $L_1C_1 = L_2C_2$, tal que o tempo de trânsito $\delta = \sqrt{LC}$ é o mesmo em cada seção da linha duplamente periódica. No segundo caso, faz-se $L_1/C_1 = L_2/C_2$ e com isso cada seção apresenta a mesma impedância característica $\sqrt{L/C}$. Várias situações são examinadas, variando-se o número de seções e a largura do pulso retangular que excita a linha. Verifica-se que a linha de transmissão duplamente periódica apresenta importantes características, sobretudo em relação aos aspectos de filtragem de frequência em que se manifesta uma propriedade de filtragem espacial, a ser discutida nas seções seguintes e que constitui a principal contribuição deste trabalho.

II. EQUAÇÕES DE CIRCUITO

a) Linha LC Periódica e Duplamente Periódica sem Carga

A Fig. 1 mostra uma linha LC generalizada sem carga, onde as variáveis de estado consideradas são a corrente I_k no indutor da seção k e a correspondente carga Q_k armazenada no capacitor da seção k.

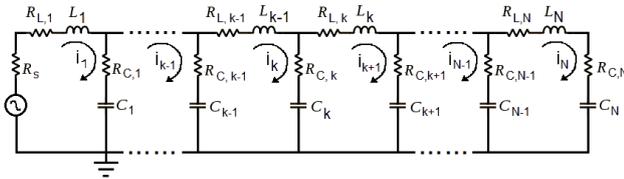


Fig.1. Linha de topologia LC sem carga com N seções.

De importância do ponto de vista numérico, foram adotadas estas variáveis de maneira que as equações diferenciais para esta linha sejam todas de primeira ordem. Considera-se ainda uma linha com perdas, onde cada indutor tem uma resistência associada $r_{L,k}$, cada capacitor tem uma resistência $r_{C,k}$ e o gerador tem uma resistência r_s .

Vamos nos referir inicialmente a uma linha com apenas três seções, conforme ilustrada na Fig. 2.

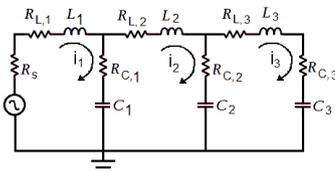


Fig.2. Circuito de uma linha LC com três seções.

Considerando cada uma das unidades de seção LC (Fig. 2), a partir das leis de Kirchhoff para tensão e corrente, obtemos as seguintes equações para esta linha.

$$V_0 - V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + r_{L,1} I_1 \quad (1)$$

$$V_1 - V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + r_{L,2} I_2$$

$$V_2 - V_3 = L_3 \frac{dI_3}{dt} + r_{L,3} I_3$$

onde $V_1(t)$, $V_2(t)$ e $V_3(t)$ representam as tensões em cada nó e $I_1(t)$, $I_2(t)$ e $I_3(t)$ representam as correntes que circulam nas malhas.

Sendo que

$$V_0 = V_s - r_s I_1 \quad (2)$$

$$V_1 = r_{C,1} (I_1 - I_2) + \frac{Q_1 - Q_2}{C_1}$$

$$V_2 = r_{C,2} (I_2 - I_3) + \frac{Q_2 - Q_3}{C_2}$$

$$V_3 = r_{C,3} I_3 + \frac{Q_3}{C_3}$$

E combinando (1) e (2) é possível escrever o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para a corrente I_k e para a carga Q_k .

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = \frac{V_s}{L_1} - \frac{r_s}{L_1} (I_1) - \frac{r_{L,2}}{L_1} (I_1) - \frac{r_{C,1}}{L_1} (I_1 - I_2) - \frac{Q_1 - Q_2}{L_1 C_1} \\ \frac{dI_2}{dt} = -\frac{r_{L,2}}{L_2} (I_2) - \frac{r_{C,1}}{L_2} (I_1 - I_2) - \frac{r_{C,2}}{L_2} (I_2 - I_3) + \frac{Q_1 - Q_2}{L_2 C_1} - \frac{Q_2 - Q_3}{L_2 C_2} \\ \frac{dI_3}{dt} = -\frac{r_{L,3}}{L_3} (I_3) - \frac{r_{C,2}}{L_3} (I_2 - I_3) - \frac{r_{C,3}}{L_3} (I_3) + \frac{Q_2 - Q_3}{L_3 C_2} - \frac{Q_3}{L_3 C_3} \\ \frac{dQ_i}{dt} = I_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (3)$$

Ao generalizar as equações para um número qualquer de seções optou-se por escrever as equações para três categorias de seções: inicial, intermediárias e final. Cada uma destas seções corresponde a duas equações, conforme apresentado a seguir:

Seção Inicial:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} (I_k) - \frac{r_{L,k+1}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) - \frac{Q_k - Q_{k+1}}{L_k C_k} \quad (4)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k$$

onde $k = 1$ e V_s representa a tensão de entrada, podendo ser um sinal senoidal, ou uma forma arbitrária de pulso (trapezoidal, triangular, etc.)

Seção Intermediária:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k} (I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k - Q_{k+1}}{L_k C_k} \quad (5)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = 2, 3, \dots, N-1$$

Seção Final:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k}(I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k}(I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k}(I_k) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k}{L_k C_k} \quad (6)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = N$$

b) Linha LC Periódica e Duplamente Periódica com Carga

A Fig. 3 mostra uma linha LC generalizada com carga, onde são consideradas as mesmas variáveis de estado adotadas para LC sem carga.

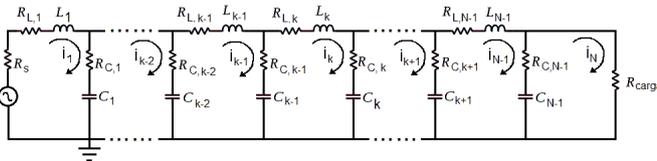


Fig.3. Linha de topologia LC com N seções e uma carga.

Considerando inicialmente uma linha LC com quatro seções, conforme ilustrada na Fig.4.

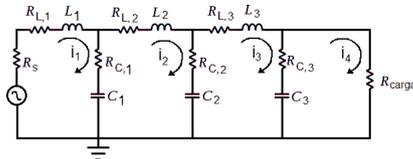


Fig.4. Circuito de uma linha LC com quatro seções e uma carga.

Considerando ainda cada uma das células LC (Fig. 4), a partir das leis de Kirchoff para tensão e corrente chega-se às seguintes equações:

$$V_0 - V_1 = L_1 \frac{dI_1}{dt} + r_{L,1} I_1 \quad (7)$$

$$V_1 - V_2 = L_2 \frac{dI_2}{dt} + r_{L,2} I_2$$

$$V_2 - V_3 = L_3 \frac{dI_3}{dt} + r_{L,3} I_3$$

$$V_3 = V_4$$

onde $V_1(t)$, $V_2(t)$, $V_3(t)$ e $V_4(t)$ representam as tensões em cada ônonô e $I_1(t)$, $I_2(t)$, $I_3(t)$ e $I_4(t)$ representam as correntes que percorrem os indutores.

Sendo que,

$$V_0 = V_s - r_s I_1 \quad (8)$$

$$V_1 = r_{C,1} (I_1 - I_2) + \frac{(Q_1 - Q_2)}{C_1}$$

$$V_2 = r_{C,2} (I_2 - I_3) + \frac{(Q_2 - Q_3)}{C_2}$$

$$V_3 = r_{C,3} (I_3 - I_4) + \frac{(Q_3 - Q_4)}{C_3}$$

$$V_4 = r_{carga} (I_4)$$

e combinando (7) e (8) escreve-se o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para a corrente I_k e para a carga Q_k .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= \frac{V_s}{L_1} - \frac{r_s}{L_1} (I_1) - \frac{r_{L,2}}{L_1} (I_1) - \frac{r_{C,1}}{L_1} (I_1 - I_2) - \frac{Q_1 - Q_2}{L_1 C_1} \quad (9) \\ \frac{dI_2}{dt} &= -\frac{r_{L,2}}{L_2} (I_2) - \frac{r_{C,1}}{L_2} (I_1 - I_2) - \frac{r_{C,2}}{L_2} (I_2 - I_3) + \frac{Q_1 - Q_2}{L_2 C_1} - \frac{Q_2 - Q_3}{L_2 C_2} \\ \frac{dI_3}{dt} &= -\frac{r_{L,3}}{L_3} (I_3) - \frac{r_{C,2}}{L_3} (I_2 - I_3) - \frac{r_{C,3}}{L_3} (I_3 - I_4) + \frac{Q_2 - Q_3}{L_3 C_2} - \frac{Q_3 - Q_4}{L_3 C_3} \\ \frac{dI_4}{dt} &= \frac{r_{C,3}}{r_{carga} + r_{C,3}} (I_3) + \frac{(I_3 - I_4)}{(r_{carga} + r_{C,3}) C_3} \\ \frac{dQ_i}{dt} &= I_i, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \right.$$

Ao generalizar as equações para um número qualquer de seções as equações são especificadas para quatro categorias de seções: inicial, intermediária, semi-final e final (carga), conforme apresentado a seguir:

Seção Inicial:

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{V_s}{L_k} - \frac{r_s}{L_k} (I_k) - \frac{r_{L,k+1}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) - \frac{Q_k - Q_{k+1}}{L_k C_k} \quad (10)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k$$

onde $k = 1$ e V_s representa a tensão de entrada, podendo ser um sinal senoidal, ou uma forma arbitrária de pulso (trapezoidal, triangular, etc.)

Seção Intermediária:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k} (I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k - I_{k+1}) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k - Q_{k+1}}{L_k C_k} \quad (11)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = 2, 3, \dots, N-2$$

Seção Semi-Final:

$$\frac{dI_k}{dt} = -\frac{r_{L,k}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k} (I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k}{L_k C_k} \quad (12)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = N-1$$

Seção Final (Carga):

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{r_{C,k-1}}{r_{carga} + r_{C,k-1}} \left(-\frac{r_{L,k}}{L_k} (I_k) - \frac{r_{C,k-1}}{L_k} (I_{k-1} - I_k) - \frac{r_{C,k}}{L_k} (I_k) + \frac{Q_{k-1} - Q_k}{L_k C_{k-1}} - \frac{Q_k}{L_k C_k} \right) + \frac{I_{k-1} - I_k}{(r_{carga} + r_{C,k-1}) C_{k-1}} \quad (13)$$

$$\frac{dQ_k}{dt} = I_k; \quad k = N$$

III. RESULTADOS

Para examinar a resposta em frequência e as características de filtragem, consideram-se inicialmente linhas LC de baixas perdas ($r_L = r_C = 0,001 \text{ á}$, $r_s = 0,1 \text{ á}$) com 10 seções sendo excitadas por sinais puramente senoidais com 1V de amplitude. A linha periódica simples (convencional) possui $L_1 = 1 \text{ μH}$ e $C_1 = 1 \text{ μF}$ e as duplamente periódicas são especificadas em dois casos: $\{L_2 = 2 \text{ μH}; C_2 = 0,5 \text{ μF}\}$ e $\{L_2 = 2 \text{ μH}; C_2 = 2 \text{ μF}\}$ nas seções pares e $\{L_1 = 1 \text{ μH}; C_1 = 1 \text{ μF}\}$ nas seções ímpares.

A resposta em frequência da linha LC simples é ilustrada na Fig. 5(a), onde se nota claramente que a linha, como

esperado, comporta-se como um filtro passa baixa, em que a frequência de corte ~ 320 kHz é determinada por $f_c = \frac{1}{\pi\sqrt{L_1C_1}}$ ($= 318,3$ kHz). A curva de resposta evidencia

claramente o caráter discreto (ou descontínuo) da linha de 10 seções, destacando-se os dez picos ressonantes, sendo que os picos se comprimem e se estreitam à medida que a frequência tende a f_c . No extremo à esquerda da faixa de frequência ($f < 50,0$ kHz), as ondulações tornam-se suaves indicando que a rede periódica comporta-se como uma linha homogênea.

Analisando as Figs. 5(b)-5(e), constata-se que a resposta das linhas duplamente periódicas difere da resposta encontrada para a linha simples. Verifica-se uma faixa proibida, separando cinco picos à direita e cinco à esquerda. No caso em que $L_1C_1 = L_2C_2$ [Figs. 5(b) e 5(d)], surge uma nova frequência crítica em $\frac{1}{\pi\sqrt{L_2C_2}}$ ($\sim 225,0$ kHz) no final da

primeira banda de passagem, com a segunda faixa estendendo-se até $\sim 340,0$ kHz. No segundo caso [Figs. 5(c) e 5(e)], em que $L_1/C_1 = L_2/C_2$, a frequência central na banda proibida é identificada por $\frac{1}{\pi\sqrt{L_2C_2}}$ ($\sim 160,0$ kHz).

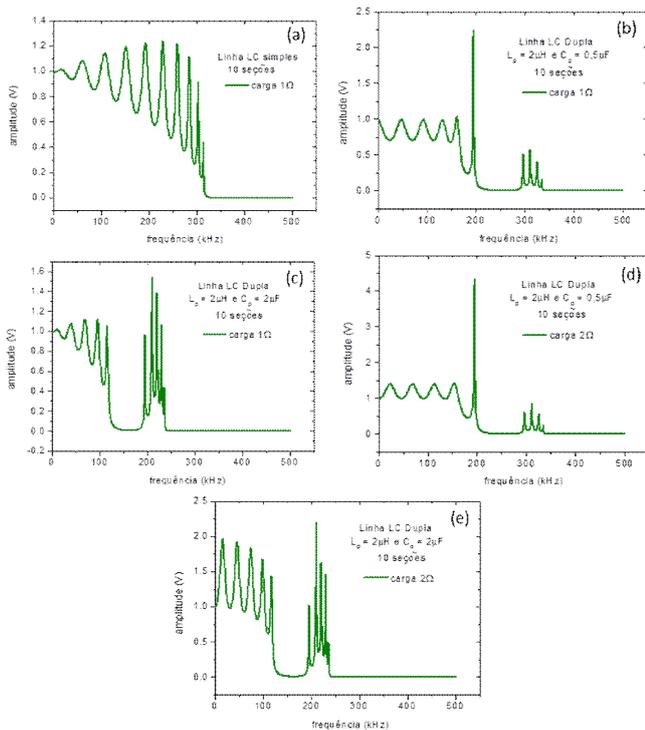


Fig.5. Sinal no nó #10 de uma linha LC (a) Periódica com $L = C = 1\mu$ e $r_{carga} = 1\Omega$; (b) Duplamente Periódica com $L = 2\mu H$, $C = 0,5\mu F$ e $r_{carga} = 1\Omega$; (c) Duplamente Periódica com $L = 2\mu H$, $C = 2\mu F$ e $r_{carga} = 1\Omega$; (d) Duplamente Periódica com $L = 2\mu H$, $C = 0,5\mu F$ e $r_{carga} = 2\Omega$; (e) Duplamente Periódica com $L = 2\mu H$, $C = 2\mu F$ e $r_{carga} = 2\Omega$;

Foram examinadas também as características de propagação e de reflexão de um pulso retangular de $40\mu s$ de largura que se propaga em linhas com 200 seções de baixas perdas ($r_L = r_C = 0,001\Omega$, $r_s = 0,1\Omega$). Inicialmente, para a linha simples e sem carga na terminação final, o tempo de

trânsito em cada seção é $\sqrt{L_1C_1} = 1,0\mu s$. Observa-se na Fig. 6(a) que o pulso refletido retorna ao nó #2 decorridos $400\mu s$, correspondendo a um percurso de ida e volta (200 seções $\times 2 \times 1,0\mu s$). O pulso distorcido deve-se ao fato da linha não estar casada, o que ocasiona certo grau de ruído no espectro correspondente mostrado na Fig. 6(b).

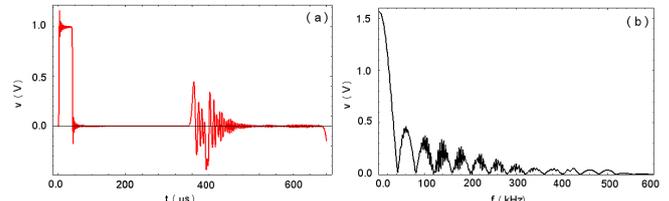


Fig.6. Sinal no nó #2 de uma linha LC Periódica com $L=1\mu H$, $C = 1\mu F$ e sem carga no final (a) Análise Transiente e (b) Análise de Fourier.

As Figs. 7-8 mostram pulsos progressivos e regressivos nos nós #100 e #200, onde os pulsos refletidos na terminação da linha preservam a forma do pulso incidente, enquanto na entrada da linha os pulsos sofreram reflexão negativa (terceiro pulso na Fig. 7 e segundo pulso na Fig. 8). Neste exemplo sem carga resistiva, a terminação da linha sendo puramente reativa o coeficiente de reflexão é de módulo unitário. Assim, com a energia não dissipada, o pulso é completamente refletido com a mesma magnitude inicial, havendo, contudo uma reflexão de fase invertida associado à terminação reativa, pois o coeficiente de reflexão é -1 .

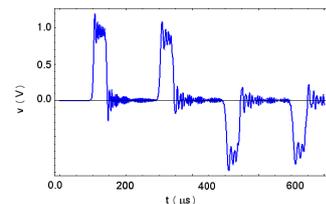


Fig.7. Análise Transiente no nó #100 de uma linha LC Periódica com $L=1\mu H$ e $C = 1\mu F$, sem carga no final.

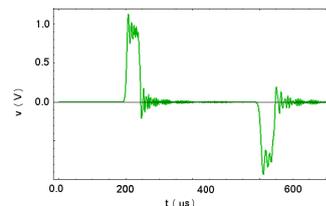


Fig.8. Análise transiente no nó #200 de uma linha LC periódica com $L=1\mu H$ e $C = 1\mu F$, sem carga no final.

Introduzindo-se uma carga 1Ω , cujo valor é próximo ao da impedância da linha, nota-se nas Figs. 9-10 que as reflexões são essencialmente eliminadas na linha periódica simples.

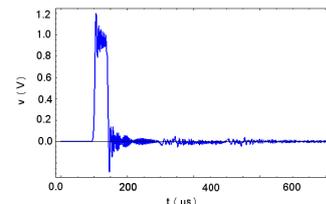


Fig.9. Análise transiente no nó #100 de uma linha LC periódica com $L = 1\mu H$, $C = 1\mu F$ e $r_{carga} = 1\Omega$.

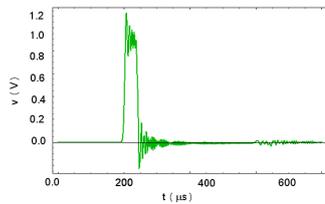


Fig.10. Análise transiente no nó #200 de uma linha LC Periódica com $L = 1\mu\text{H}$, $C = 1\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 1\ \Omega$.

As Figs. 11-12 ilustram que a presença de uma carga de $2\ \Omega$ produz um certo grau de reflexão nos pulsos.

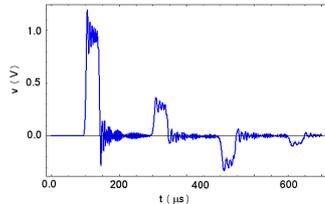


Fig.11. Análise transiente no nó #100 de uma linha LC periódica com $L = 1\mu\text{H}$, $C = 1\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 2\ \Omega$.

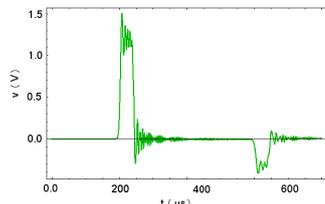


Fig.12. Análise do transiente no nó #200 de uma linha LC periódica com $L = 1\mu\text{H}$, $C = 1\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 2\ \Omega$.

Investigando-se no que segue a propagação do pulso retangular de $40\ \mu\text{s}$ de largura em linhas duplamente periódicas em que $L_1C_1 = L_2C_2 = 1$, verifica-se na Fig. 13(a) que para uma carga resistiva de $1\ \Omega$, cujo valor é muito próximo da impedância característica da linha simples, acarreta a reflexão de pulsos. Na Fig. 14(a), em que a carga é de $2\ \Omega$, nota-se que os pulsos refletidos têm polaridade inversa aos pulsos da Fig. 13(a). Mas ambos os casos, uma vez que $L_1C_1 = L_2C_2$, o tempo de trânsito até o nó #200 [Figs. 13(b) e 14(b)] é $\sim 200,0\ \mu\text{s}$.

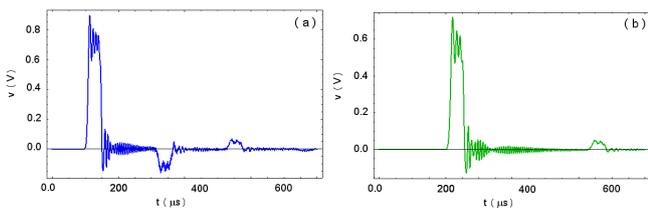


Fig.13. Sinal de uma linha LC duplamente periódica com $L_1 = 1\mu\text{H}$, $C_1 = 1\mu\text{F}$, $L_2 = 2\mu\text{H}$, $C_2 = 0,5\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 1\ \Omega$ (a) Análise transiente no nó #100, (b) Análise transiente no nó #200.

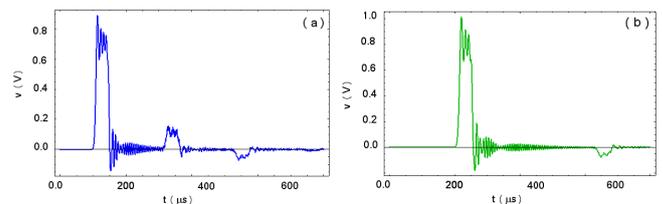


Fig.14. Sinal de uma linha LC duplamente periódica com $L_1 = 1\mu\text{H}$, $C_1 = 1\mu\text{F}$, $L_2 = 2\mu\text{H}$, $C_2 = 0,5\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 2\ \Omega$ (a) Análise transiente no nó #100, (b) Análise transiente no nó #200.

Na condição em que $L_1/C_1 = L_2/C_2 = 1$ [Fig. 15(a)] a presença de uma carga de $1\ \Omega$ elimina essencialmente os efeitos de reflexão, mas neste exemplo o tempo de trânsito torna-se mais longo, sendo da ordem de $282\ \mu\text{s}$ para o nó #200, por exemplo [Fig. 15(b)].

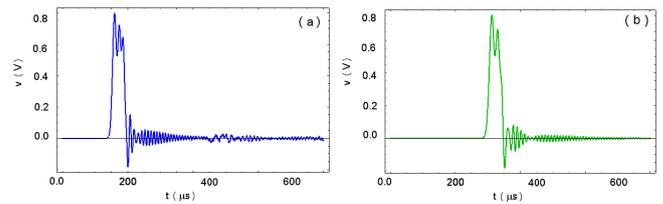


Fig.15. Sinal de uma linha LC duplamente periódica com $L_1 = 1\mu\text{H}$, $C_1 = 1\mu\text{F}$, $L_2 = 2\mu\text{H}$, $C_2 = 2\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 1\ \Omega$ (a) Análise transiente no nó #100, (b) Análise transiente no nó #200.

Para investigar as propriedades de filtragem da linha duplamente periódica considera-se agora na entrada da linha um pulso retangular estreito, de $5\ \mu\text{s}$ de largura o que corresponde a um lóbulo central de $200\ \text{kHz}$ de largura em seu espectro de frequência como ilustrado na Fig. 16(a). Nota-se então na sequência de espectros que o sinal em cada nó da linha ($L_1C_1 = L_2C_2$) apresenta uma determinada característica. Vê-se, por exemplo, nas Figs. 16(b) e 16(c), correspondente aos nós #10 e #100, uma faixa isolada de frequência compreendida entre 280 e $350\ \text{kHz}$ comprimida no segundo lóbulo. A amplitude do sinal associada à faixa de frequência decresce progressivamente com a ordem do nó, sendo extinta na posição #200 [Fig. 16(d)]. Pode-se interpretar tal fenômeno como um efeito local em cada nó, podendo ser caracterizado como um processo espacial de controle e filtragem de frequência.

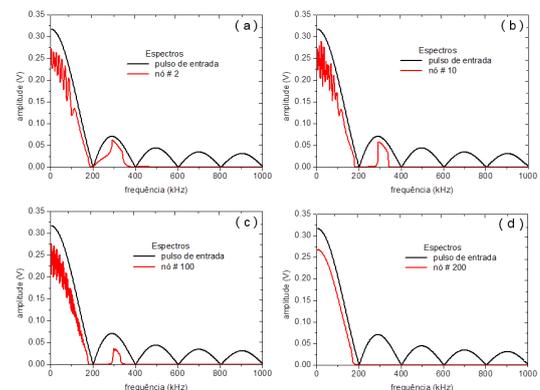


Fig.16. Filtragem espacial de uma linha LC duplamente periódica com $L_1 = 1\mu\text{H}$, $C_1 = 1\mu\text{F}$, $L_2 = 2\mu\text{H}$, $C_2 = 0,5\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 1\ \Omega$ (a) nó #2, (b) nó #10, (c) nó #100 e (d) nó #200.

Tal mecanismo também se manifesta na linha com $L_1/C_1 = L_2/C_2$ (Fig. 17), mas neste caso o lóbulo principal referente ao intervalo 0 ó 200 kHz [Figs. 17(b)-(d)] fica bruscamente interrompido em 160 kHz, o que corresponde à frequência de

$$\frac{1}{\pi\sqrt{L_2C_2}}$$

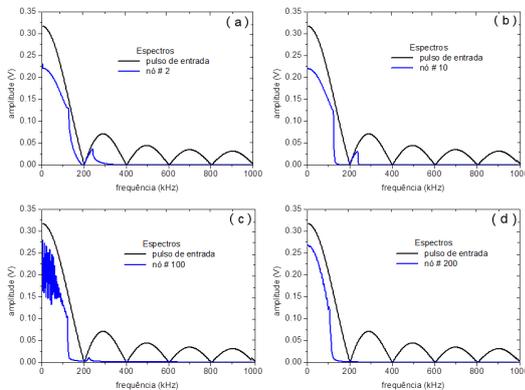


Fig.17. Filtragem espacial de uma linha LC duplamente periódica com $L_1 = 1 \mu\text{H}$, $C_1 = 1 \mu\text{F}$, $L_2 = 2\mu\text{H}$, $C_2 = 2\mu\text{F}$ e $r_{\text{carga}} = 1\Omega$ (a) nó #2, (b) nó #10, (c) nó #100 e (d) nó #200.

IV. CONCLUSÃO

Foram investigados fenômenos de propagação em linhas de transmissão constituídas de células LC periódicas e LC duplamente periódicas. Usando a corrente no indutor e a carga armazenada no capacitor como variáveis de estado, um sistema de equações de primeira ordem no domínio do tempo foi deduzido para estas duas topologias. A formulação das equações diferenciais permitiu que a cada elemento discreto em uma seção particular i , pudessem ser atribuídos valores arbitrários L_i e C_i .

Para examinar a resposta em frequência e as características de filtragem, foram consideradas inicialmente linhas LC de baixas perdas e com 10 seções sendo excitadas por sinais puramente senoidais com 1V de amplitude. A resposta em frequência da linha LC simples mostrou que a linha comporta-se como um filtro passa baixa. Em contrapartida, na linha duplamente periódica, verificou-se uma faixa proibida, separando cinco picos à direita e cinco à esquerda.

Ao examinar as características de propagação e de reflexão de um pulso retangular de $40\mu\text{s}$ de largura que se propaga em linhas periódicas com 200 seções de baixas perdas, verificou-se que sem carga resistiva, o pulso é completamente refletido com a mesma magnitude inicial, havendo, contudo um desvio de fase de 180° associado à seção final com carga reativa. Em seguida, introduzindo uma carga resistiva de 1Ω , cujo valor é próximo da impedância da linha, notou-se que as reflexões são essencialmente eliminadas na linha periódica simples.

Em linhas duplamente periódicas em que $L_1/C_1 = L_2/C_2$, verificou-se reflexão de pulsos, para uma carga resistiva de 1Ω , e para uma carga de 2Ω notou-se que os pulsos refletidos têm polaridade inversa aos pulsos encontrados para a carga de 1Ω .

Ao investigar as propriedades de filtragem da linha duplamente periódica, constatou-se que a amplitude do sinal associada à faixa de frequência decresce progressivamente com a ordem do nó, sendo extinta na posição #200 (último nó). Tal fenômeno pode ser caracterizado como um processo espacial de controle e filtragem de frequência.

Contudo, verificou-se que a linha de transmissão duplamente periódica apresenta importantes características, sobretudo em relação aos aspectos de filtragem de frequência em que se manifesta uma propriedade de filtragem espacial.

AGRADECIMENTO

Ana Flávia Guedes Greco agradece à CAPES pelo financiamento e apoio a este trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] Tom Dhaene and Daniel De Zutter, "Selection of Lumped Element Models for Coupled Lossy Transmission Lines", *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, vol. 11, no. 7, pp. 805-8015, July, 1992.
- [2] Jyh-Ming Jong, Bozidar Janko, and Vijai Tripathi, "Equivalent Circuit Modeling of Interconnects from Time-Domain Measurements", *IEEE Transactions on Components, Hybrids, and Manufacturing Technology*, vol. 16, no. 1, pp. 119-126, February 1993.
- [3] A. Tomaz, J. J. Barroso, A. J. F. Orlando, "Propriedades Refrativas de Dielétricos Artificiais Formados por um Arranjo Periódico de Fios Condutores Paralelos", *15º SBMO ó Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e o 10º CBMag ó Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, João Pessoa, PB, 5-8 de agosto, 2012.
- [4] A. Tomaz, J. J. Barroso, A. J. F. Orlando, "Metamaterial Ultra-Refrativo para Emissão Diretiva em Antenas na Banda Ku", *15º SBMO ó Simpósio Brasileiro de Micro-ondas e Optoeletrônica e o 10º CBMag ó Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo*, João Pessoa, PB, 5-8 de agosto, 2012.
- [5] M. Remoissenet, *Waves Called Solitons: Concepts and Experiments*. France: Springer, 1999.
- [6] P. C. Magnusson, G. C. Alexander, V. K. Tripathi, A. Weishaar, *Transmission Lines and Wave Propagation*. New York: CRC Press, 2001.
- [7] C. Caloz and T. Itoh, *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications*. New York: Wiley, 2004.
- [8] G.V. Eleftheriades, A.K. Iyer, and P.C. Kremer, "Planar negative refractive index media using periodically L-C loaded transmission lines", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 50, pp. 2702-2712, Dec. 2002.
- [9] R. Liu, B. Zhao, X. Q. Lin, and T. J. Cui, "Experimental observation of evanescent-wave amplification and propagation in microwave regime", *Appl. Phys. Lett.*, vol 89, Art. ID 221919, 2006.
- [10] Mathematica v. 5.0, Wolfram Research. Disponível em: <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [11] A. F. G. Greco, J. J. Barroso, J. O. Rossi, "Modeling and Analysis of Ladder-Network Transmission Lines with Capacitive and Inductive Lumped Elements", submitted to *Mathematical Problems in Engineering*.