

Compressive Sensing: Uma Ferramenta Alternativa para Estimação de Direção de Chegada

Adilson Chinatto^{*†}, Cynthia Junqueira[†], João Marcos T. Romano[†] e Pascal Larzabal[‡]
^{*}ESPECTRO Ltda., Brasil [†]FEEC, UNICAMP, Brasil [‡]Laboratoire SATIE, ENS-Cachan, França

Resumo – Este trabalho apresenta ferramentas baseadas no conceito de esparsidade, com aplicação no problema de estimação de direção de chegada (DOA) em arranjos de antenas. As técnicas tratadas pertencem ao conhecido escopo do *compressive sensing* e representam uma alternativa realista e menos custosa aos métodos de estimação de DOA tradicionais como o MUSIC e o ESPRIT, permitindo estimação precisa mesmo em cenários com poucas antenas e uso de poucos *snapshots*.

Palavras-chave – Radar, DOA, compressive sensing.

I. INTRODUÇÃO

A estimação de direção de chegada (DOA) em arranjos de antenas têm grande importância em aplicações civis e militares tais como radar, sonar, e comunicações móveis. Ela é realizada por técnicas de processamento de sinais que usam a informação temporal e espacial capturadas por amostragem da frente de onda e geralmente são baseadas em estimação espectral. Os algoritmos mais representativos dessas técnicas são o *beamforming* [1], o algoritmo MUSIC [2] e o algoritmo ESPRIT [3]. Esses algoritmos têm a desvantagem de basear-se na exploração da matriz de autocorrelação das amostras recebidas e, portanto, fornecem bons resultados de estimação apenas nos casos em que um grande número de amostras é considerado. Isso faz com que sua complexidade computacional seja elevada, além de não garantir bom funcionamento no caso em que poucas amostras são consideradas.

Por outro lado, recentemente, um tipo interessante de técnica de estimação denominada *compressive sensing* (CS) vem emergindo, encontrando aplicação em diferentes frentes tais como codificação, separação de fontes, decomposição de imagem e estimação, entre outras [4–6]. Neste tipo de aplicação o problema é buscar a solução esparsa de um sistema sub-determinado de equações, que em outras palavras significa determinar uma aproximação do sinal esparsa via uma combinação linear da matriz de mistura. A otimização esparsa pode ser classificada como um problema inverso que pode ser regularizado pela adoção de restrições baseadas na otimização da norma ℓ_0 . Esse problema, no entanto, apresenta complexidade combinatória ou não-polinomial (NP-hard). No entanto, a literatura apresenta

aplicações em que é possível substituir a norma ℓ_0 pela norma ℓ_1 , tornando o problema de complexidade combinatória em um outro, convexo, e solucionável por conhecidas técnicas matemáticas estudadas desde os anos 60. Três classes de soluções são largamente difundidas: a primeira engloba os algoritmos que lidam com programação linear, tais como Basis Pursuit (BP) e Basis Pursuit De-Noising (BPDN) [7]; a segunda é formada pelos algoritmos iterativos como o *iterative shrinkage-thresholding* (ISTA) [8] e suas variantes; finalmente, a terceira classe comporta os algoritmos da família *Greedy*, introduzidos nos anos 90 tais como *matching pursuit* (MP) [9], *orthogonal matching pursuit* (OMP) [10] e *orthogonal least squares* (OLS) [11].

Embora tenham inúmeras vantagens e solucionem vários problemas de otimização esparsa, os algoritmos baseados na relaxação da norma ℓ_0 para a norma ℓ_1 têm seu desempenho dependente de vários fatores tais como características específicas da matriz de mistura e do vetor de sinais esparsos. É sabido que uma boa recuperação do sinal estimado só é alcançada se a matriz de mistura obedece às propriedades de isometria restrita (RIP) [12], o que não é observado no caso de estimação de DOA já que, nesse caso, a matriz de mistura é extramamente correlacionada.

Se por um lado as técnicas de otimização esparsa baseadas na norma relaxada ℓ_1 para estimação de DOA falham devido ao fato da matriz de mistura não obedecer ao RIP e por outro as técnicas de otimização ℓ_0 apresentem complexidade combinatória, recentemente um estudo realizado conjuntamente entre a ENS-Cachan/SATIE (França) e FEEC-Unicamp (Brasil), iniciado 2014, tem demonstrado possibilidades de estimação de DOA por minimização da norma ℓ_0 por métodos iterativos, empregando, por exemplo, o algoritmo *iterative hard-thresholding* (IHT) [13].

Neste trabalho, foram selecionados alguns dos algoritmos da literatura para serem aplicados ao problema de estimação de DOA e analisados num cenário realista onde a condição de estimação encontra-se numa situação de baixa relação sinal ruído (SNR) e proximidade entre os ângulos de chegada dos sinais incidentes no arranjo de antenas, o que leva a uma situação em que a matriz de mistura é altamente correlacionada e as técnicas baseadas na relaxação ℓ_1 geralmente falham.

O trabalho está organizado da seguinte forma: a seção II apresenta uma breve revisão sobre os algoritmos para otimização esparsa; a seção III descreve os cenários de aplicação considerados nas simulações realizadas; a seção IV mostra os resultados das simulações e trás as análises dos dados; finalmente, na seção V são apresentadas as conclusões e perspectivas para o desenvolvimento do trabalho.

Adilson Chinatto, chinatto@espectro-eng.com.br; Cynthia Junqueira, cynthiaj@dmo.fee.unicamp.br; João Marcos T. Romano, romano@decom.fee.unicamp.br; Pascal Larzabal, pascal.larzabal@satie.ens-cachan.fr. Este trabalho teve apoio financeiro do CAPES-COFECUB sob processo 772-13.

II. ALGORITMOS PARA OTIMIZAÇÃO ESPARSA

Em problemas de otimização esparsa, busca-se a estimação de um vetor ou matriz que passa por um processo de mistura linear, resultando em um vetor ou matriz de observações corrompido por ruído. Em sua versão vetorial, o sistema de equações que compõe o problema pode ser escrito como

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{n}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ corresponde ao vetor de observações, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{N \times 1}$ corresponde à entrada ou vetor a ser estimado, $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ é a matriz de mistura e $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{M \times 1}$ é o vetor de ruído. Da mesma forma, no caso do problema matricial, (1) pode ser escrita como

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{N}, \quad (2)$$

com $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{M \times L}$, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N \times L}$ e $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M \times L}$. Neste trabalho, a solução dos sistemas de equações (1) e (2) pressupõe o conhecimento das observações \mathbf{y} ou \mathbf{Y} e da matriz de mistura \mathbf{A} , levando ao vetor estimado $\hat{\mathbf{x}}$ ou à matriz estimada $\hat{\mathbf{X}}$, respectivamente. No restante deste trabalho será considerada a formulação (1) visando a simplicidade de notação, embora o problema de estimação de DOA corresponda à formulação matricial.

Entre os vários algoritmos para otimização esparsa, destacam-se os baseados em programação linear como o BP e o BPDN [7], os algoritmos da família *Greedy*, tais como o MP [9], o OMP [10] e o *compressive sampling matching pursuit* (CoSaMP) [14], ou ainda os algoritmos iterativos tais como o ISTA [8] e o IHT [13]. Todas estas ferramentas apóiam-se na possibilidade de lidar com cenários realistas e muitas vezes de tempo real. Exceção feita ao IHT, todos os outros apoiam-se na otimização da norma relaxada ℓ_1 .

Os algoritmos BP e BPDN transpõem o problema da minimização ℓ_0 para um problema de minimização ℓ_1 . Estes algoritmos requerem condições mais severas sobre as medidas sobre os vetores esparsos, embora muitas matrizes satisfaçam esta condição (da função injetora). A aproximação da minimização ℓ_1 garante uniformidade e estabilidade, mas recai em métodos de programação linear. Estes métodos são conhecidos e são descritos como de alto custo computacional.

Por outro lado, os algoritmos da família *Greedy* calculam o *suporte* do sinal iterativamente. Uma vez que o suporte S do sinal foi calculado, o sinal \mathbf{x} pode ser reconstruído por meio de $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_S^\dagger \mathbf{y}$, onde \mathbf{A}_S é a medida da matriz \mathbf{A} restrita às colunas indexadas por S e $(\cdot)^\dagger$ denota a pseudo-inversa. Estes algoritmos são rápidos, mas não garantem uniformidade e estabilidade.

Os métodos baseados em programação linear proporcionam algumas garantias de convergência, mas usam rotinas lentas e custosas, enquanto que os algoritmos da família *Greedy* são rápidos, mas perdem na questão das garantias de estabilidade e uniformidade. Além disso, por resolverem problemas baseados na minimização da norma ℓ_1 , só podem ser aplicados aos problemas que respeitam a RIP, o que nem sempre é possível. Por outro lado, se a esparsidade do problema é conhecida, os algoritmos da família *Greedy* são extremamente mais atraentes que os baseados em programação linear.

Embora as técnicas de relaxação da norma ℓ_0 para a norma ℓ_1 e os algoritmos do tipo *Greedy* possam ser usados em um amplo espectro de aplicações, as restrições impostas pela RIP muitas vezes fazem com que os resultados de estimação obtidos com o uso desses algoritmos sejam precários. Isso acontece especialmente em aplicações em que a matriz de mistura \mathbf{A} apresenta colunas fortemente correlacionadas ou em situações em que os elementos não nulos do vetor a ser estimado \mathbf{x} estejam muito próximos. Exemplos de aplicações em que a relaxação da norma ℓ_0 para a norma ℓ_1 não produz bons resultados englobam o caso da estimação de DOA. Para se contornar os problemas de estimação apresentados pelos algoritmos de norma relaxada e tendo em mente as dificuldades do uso direto de otimização ℓ_0 , dada sua complexidade computacional combinatória, recentemente algumas técnicas têm sido desenvolvidas com o objetivo de realizar a otimização ℓ_0 através de algoritmos iterativos. Um dos algoritmos aqui elencados para representar essa classe de técnicas é o IHT [13], que tem convergência garantida no caso em que a norma espectral da matriz de mistura é menor que a unidade.

Neste trabalho, foram selecionados os algoritmos OMP e IHT como representantes de cada classe para ilustrar a solução do problema de estimação de DOA através das técnicas de otimização esparsa.

Algoritmo Orthogonal Matching Pursuit

O algoritmo OMP foi desenvolvido por Mallat e colaboradores [15] e analisado por Gilbert e Tropp [10]. Aplica medidas de matrizes sub Gaussianas para reconstruir os sinais esparsos. Se \mathbf{A} é suficientemente descorrelacionada, então $\mathbf{A}^H \mathbf{A}$ está num sentido amplo perto da identidade. Portanto pode-se esperar que a coordenada do vetor de resíduos $\mathbf{r} = \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ que contém o elemento de máxima energia corresponda à posição de \mathbf{x} cujo elemento apresenta essa mesma característica. Desta forma uma das coordenadas do suporte do sinal \mathbf{x} é estimada. O algoritmo prossegue subtraindo-se esta contribuição do vetor de observação \mathbf{y} e repetindo esta operação até que se atinja a esparsidade indicada inicialmente. O algoritmo pode ser descrito conforme o Alg. 1.

Algoritmo Iterative Hard Thresholding

O IHT [13] é um algoritmo iterativo simples, mas muito diferente dos anteriormente citados. Ele não é baseado na minimização da norma ℓ_1 , mas sim da norma ℓ_0 , e utiliza um operador de limiar, $H_{\sqrt{2\lambda}}$, não linear e não contínuo, para reduzir o valor da norma ℓ_0 a cada iteração. O operador de limiar $H_{\sqrt{2\lambda}}$ pode ser visualizado na Fig. 1. A cada iteração a adaptação baseada no gradiente descendente passa por uma função do tipo *hard-thresholding*, que anula todos os elementos do vetor estimado que tenham amplitude inferior à penalização $\sqrt{2\lambda}$. Essa função de limiar é não contínua e é definida como

$$H_{\sqrt{2\lambda}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < \sqrt{2\lambda} \\ x & \text{se } |x| \geq \sqrt{2\lambda} \end{cases}. \quad (3)$$

Algoritmo 1 Algoritmo OMP

Inicialização: $\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{y}$; $\mathbf{A}_S = \emptyset$; $k = 0$; esparsidade K
repeat
 $i^{(k)} = \arg \max \{ \langle \mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{A} \rangle \} \rightarrow \mathbf{a}_{i^{(k)}}$
 $\mathbf{A}_S \leftarrow \mathbf{A}_S \cup \mathbf{a}_{i^{(k)}}$
 $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} \leftarrow \mathbf{A}_S^\dagger \mathbf{y}$
 $\mathbf{r}^{k+1} \leftarrow \mathbf{y} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^{(k+1)}$
 $k \leftarrow k + 1$
until $k = K$

Algoritmo 2 Algoritmo IHT

Inicialização: $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{0}$; $k = 0$; λ
repeat
 $\nabla_{\hat{\mathbf{x}}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{A}^H \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}^{(k)} - \mathbf{A}^H \mathbf{y}$
 $\hat{\mathbf{x}}_{int} \leftarrow \hat{\mathbf{x}}^{(k)} - \nabla_{\hat{\mathbf{x}}}^{(k)}$
 $\hat{\mathbf{x}}^{(k+1)} \leftarrow H_{\sqrt{2\lambda}} \{ \hat{\mathbf{x}}_{int} \}$
 $k \leftarrow k + 1$
until critério de parada satisfeito

III. CENÁRIO DE APLICAÇÃO

Os sinais que chegam em um arranjo de antenas são intrinsecamente esparsos no domínio espacial e as análises dos algoritmos que utilizam a teoria de *compressive sensing* para a observação de DOA mostram-se promissoras. Dessa forma, comprovados pelo estudo teórico existem fortes indicações que estes sinais podem ser tratados como estatisticamente esparsos, e assim, a problemática de estimação de DOA pode ser resolvida via algoritmos hoje utilizados em processamento de sinais comprimidos. Neste trabalho são apresentados alguns dos resultados alcançados com simulações computacionais de alguns dos algoritmos apresentados na seção II, sendo o desempenho do algoritmo MUSIC [2] usado como critério de comparação. Considerou-se primeiramente um arranjo de antenas linear, omnidirecional, com elementos separados de metade do comprimento de onda, onde o arranjo pode conter 4, 6, 8, 12,

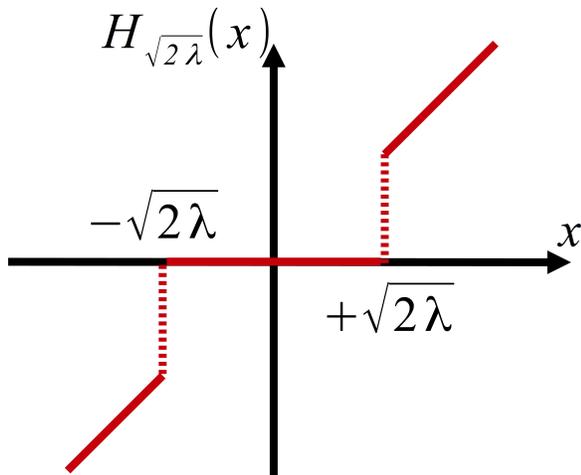


Fig. 1. Operador de limiar do algoritmo IHT.

16, 24, 32, 48 ou 64 elementos, esquematicamente ilustrado na Fig. 2. Dois sinais atingem a rede de antenas sob ângulos de incidência θ_1 e θ_2 , gerados de maneira aleatória, de mesma potência, e distribuídos entre -60° e $+60^\circ$ de forma que a diferença entre eles $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$ possa ser 5° , 10° ou 20° .

A grade de estimação escolhida foi de 1° . O erro médio mínimo é de $0,2887^\circ$, está relacionado com o desvio padrão da distribuição uniforme e está indicado em todos os resultados de simulações como uma linha horizontal. A relação sinal-ruído (SNR) pode tomar os seguintes valores: 20 dB, 10 dB, 0 dB e -10 dB. A Fig. 3 ilustra a relação entre os sinais incidentes e a problemática envolvida em *compressive sensing*. Nesse caso, o intervalo possível de ângulos de chegada, definido como $[-90^\circ, +90^\circ]$, é discretizado em passos correspondentes à grade de estimação. Dessa forma, a cada *snapshot* o sinal a ser estimado corresponde a um vetor esparsos com apenas duas posições não nulas. Finalmente, à medida em que os *snapshots* vão sendo obtidos, os vetores são empilhados, gerando uma matriz esparsa a ser estimada que conta com apenas duas linhas de elementos não nulos.

Para as simulações foram considerados 10 e 100 snapshots e 1000 rodadas Monte Carlo (MC). Os resultados foram apresentados em relação à raiz do erro médio quadrático, dado

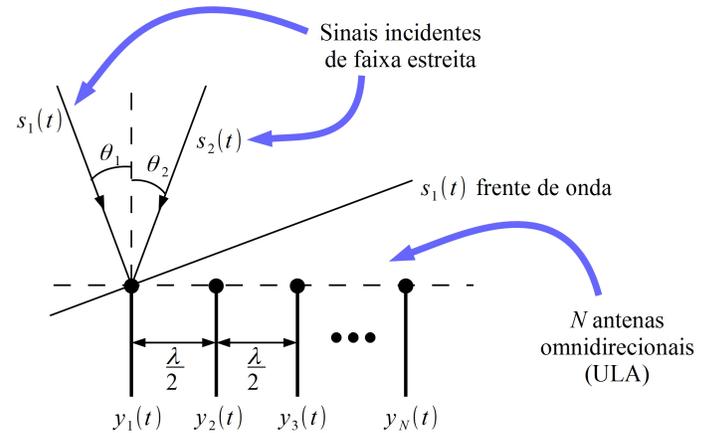


Fig. 2. Arranjo de antenas linear uniforme (ULA).

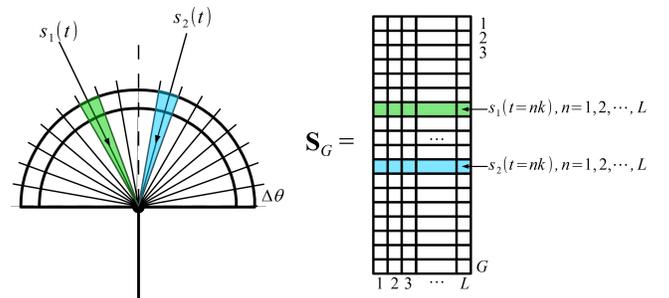


Fig. 3. Representação esquemática do arranjo de antenas usado neste trabalho.

por

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{2000} \sum_{i=1}^{1000} \left(\theta_1^{(i)} - \hat{\theta}_1^{(i)} \right)^2 + \left(\theta_2^{(i)} - \hat{\theta}_2^{(i)} \right)^2}, \quad (4)$$

onde $\theta_1^{(i)}$ e $\theta_2^{(i)}$ correspondem aos ângulos de chegada dos sinais incidentes na i -ésima rodada de simulação e $\hat{\theta}_1^{(i)}$ e $\hat{\theta}_2^{(i)}$ suas correspondentes estimações.

IV. RESULTADOS E ANÁLISES

As simulações computacionais contemplaram os cenários descritos na seção III. O primeiro grupo de simulações considerou a estimação de DOA empregando o algoritmo IHT, que minimiza iterativamente a norma ℓ_0 . Os resultados de estimação em termos de RMSE foram comparados com os obtidos pelo emprego do MUSIC. O segundo grupo de simulações mostrou o desempenho do algoritmo OMP na tarefa de estimação de DOA.

Estimação de DOA Empregando IHT

O objetivo do conjunto de simulações envolvendo o algoritmo IHT é verificar seu desempenho considerando variações de SNR, de diferença angular entre os sinais incidentes e de número de *snapshots* empregado.

As Fig. 4 e 5 apresentam o desempenho comparativo entre os algoritmos MUSIC e IHT na situação em que se variam as separações de ângulos e a SNR, mantendo-se constante o número de *snapshots*. Quando a diferença angular é de 20° , o IHT apresenta desempenho similar ao do MUSIC, não importando a SNR, sendo que quando o número de antenas é pequeno, o desempenho do IHT chega a ser melhor que o do MUSIC. Por outro lado, quando a diferença angular é de 5° , para poucas antenas o desempenho do IHT é bastante superior ao do MUSIC para situações de pouco ruído, especialmente quando poucas antenas são empregadas.

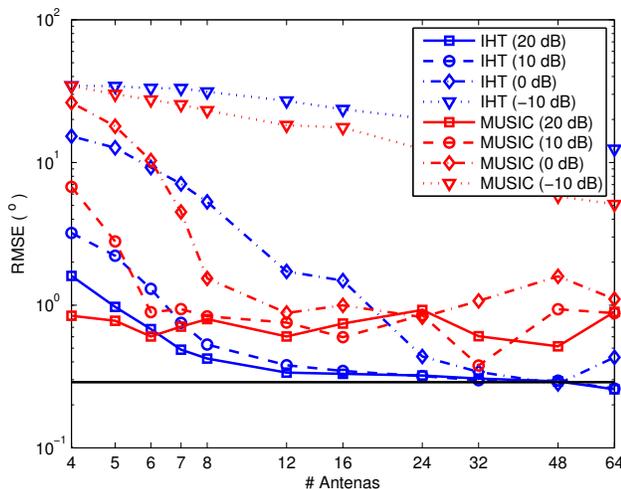


Fig. 4. IHT vs. MUSIC: $\Delta\theta = 20^\circ$ e 10 *snapshots*.

Nas Fig. 6 e 7 é mostrado o desempenho dos algoritmos quando a SNR e o número de *snapshots* são mantidos constantes, variando-se a diferença angular dos sinais incidentes. Nota-se que não importando o nível de ruído, há pouca variação no desempenho do IHT com a aproximação ou distanciamento angular dos sinais incidentes. Esse fato, todavia, não é observado no MUSIC quando o número de antenas é pequeno (inferior a 12 no caso de pouco ruído e inferior a 32 no caso de muito ruído). De fato, para poucas antenas o MUSIC apresenta erros de estimação substancialmente grandes quando as diferenças angulares são pequenas. Pode-se afirmar, portanto, que devido a característica de esparsidade adotada no caso da estimação pelo algoritmo IHT, os resultados são similares não importando a separação entre os sinais incidentes. Este fato pode representar uma grande vantagem do IHT sobre o MUSIC em situações realistas, nas quais não se tem controle ou conhecimento da SNR.

Finalmente, a Fig. 8 ilustra o comportamento da estimação de DOA com a variação do número de *snapshots* empregado, numa situação em que a SNR = 10 dB e a diferença angular entre os sinais incidentes é de $\Delta\theta = 5^\circ$. Nota-se que a variação de desempenho do MUSIC para poucas antenas é substancial quando se passe de 10 *snapshots* para 100 *snapshots*. Por outro lado, no caso do IHT, embora haja diferença no desempenho, ela é bastante pequena. Nota-se, ainda, que o IHT oferece resultados de estimação melhores do que o MUSIC para poucas antenas, não importando o número de *snapshots* considerado.

Estimação de DOA Empregando OMP

Um segundo grupo de análises foi realizado com o algoritmo OMP buscando ilustrar seu desempenho frente a cenários da mesma natureza que os anteriormente descritos. Foram realizados grupos de simulações variando número de antenas e número de *snapshots*, mantendo fixa a SNR com valor 20 dB. Na Fig. 9, observa-se o desempenho do OMP e notadamente verifica-

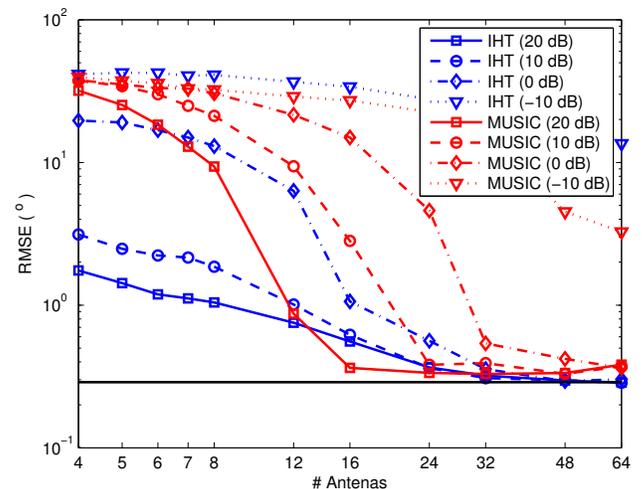


Fig. 5. IHT vs. MUSIC: $\Delta\theta = 5^\circ$ e 10 *snapshots*.

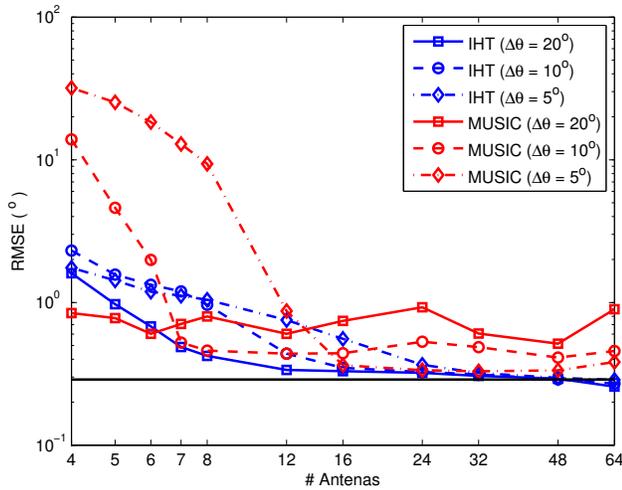


Fig. 6. IHT vs. MUSIC: SNR = 20 dB e 10 *snapshots*.

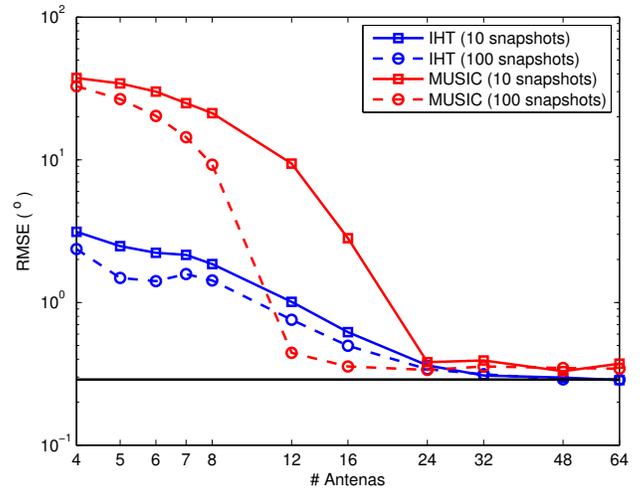


Fig. 8. IHT vs. MUSIC: SNR = 10 dB e $\Delta\theta = 5^\circ$.

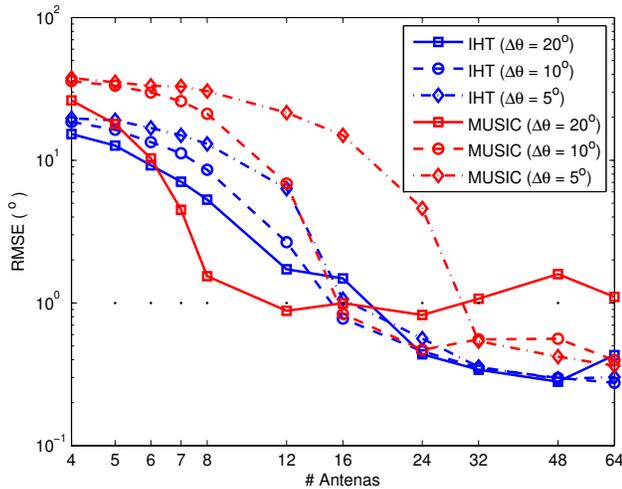


Fig. 7. IHT vs. MUSIC: SNR = 0 dB e 10 *snapshots*.

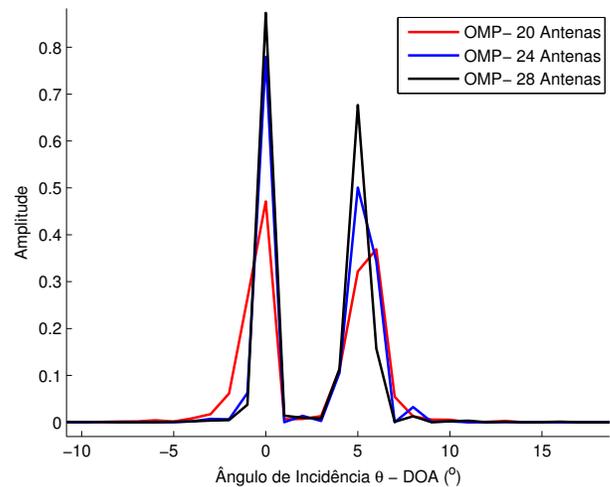


Fig. 9. OMP: SNR = 20 dB e 10 *snapshots*.

se a dependência da precisão de estimação com a variação do número de antenas. Para arranjos com 20 elementos o algoritmo já se mostra bastante ineficiente. Quando o número de antenas é aumentado, para 28 ou 30 antenas, verifica-se desempenho satisfatório mesmo com poucos *snapshots*: neste caso 10 *snapshots* foram considerados. Foi verificado também que mesmo que o número de *snapshots* aumente, os resultados não são significativamente melhores. Este é um fato restritivo, pois muitas aplicações em comunicações móveis não permitem uso de grandes arranjos.

Os resultados são similares àqueles obtidos com MUSIC, mas com complexidade computacional inferior. Por outro lado, a aplicação do OMP no problema DOA requer a vetorização da matriz de autocorrelação fazendo com que a dimensão das

operações matriciais aumente exponencialmente. Assim, este algoritmo é muitas vezes mais complexo que os outros analisados neste trabalho.

Ao contrário do IHT, o uso do OMP na tarefa de estimação de DOA pressupõe o conhecimento *a priori* da esparsidade. Esse conhecimento faz com que a velocidade de convergência do OMP seja alta pois o algoritmo é executado apenas o número de vezes correspondente à esparsidade. Porém, o conhecimento prévio da esparsidade não ocorre na maioria das aplicações práticas, fazendo com que o critério de parada do OMP possa ser estabelecido, por exemplo, a partir do erro de estimação. Nesse caso, não há garantia de que o OMP atinja rapidamente esse critério e pode-se chegar a situações em que o algoritmo convirja para um mínimo local da função a ser minimizada.

V. CONCLUSÕES

Estimação de DOA historicamente tem sido um problema crítico em sistemas de defesa, de guerra eletrônica e em aplicações civis tais como comunicações móveis. Neste trabalho considerou-se ferramentas alternativas aos métodos tradicionais, apoiadas nos conceitos de esparsidade, para diminuir a complexidade computacional do processo de estimação de DOA.

A aplicação de algoritmos tradicionais baseados em técnicas de subespaço, como o MUSIC e o ESPRIT, é bastante difundida. Porém, existem restrições relacionadas à sua complexidade computacional e ao número de *snapshots* necessários para uma estimação eficiente, aliando a isso a problemática da necessidade de um número muitas vezes excessivo de antenas para uma boa resolução de estimação. Por outro lado, técnicas que baseiam-se na exploração da esparsidade espacial do cenário tendem a produzir resultados de estimação precisos, necessitando para isso de poucos *snapshots* e de poucas antenas, com eventual diminuição da complexidade computacional.

Neste trabalho, técnicas de estimação baseadas no escopo do *compressive sensing* foram empregadas na tarefa de estimação de DOA, alcançando resultados similares ou superiores àqueles obtidos por algoritmos clássicos. Em especial, comparou-se o desempenho do algoritmo MUSIC com o algoritmo IHT e evidenciou-se a superioridade deste no processo de estimação em situações que envolvem poucos *snapshots* e poucas antenas. Adicionalmente, realizou-se um estudo de caso para avaliar a capacidade de estimação de DOA empregando-se o algoritmo OMP.

Os resultados mostrados neste trabalho indicam um caminho promissor na simplificação e otimização do processo de estimação de DOA, permitindo o uso de arranjos com menos antenas e diminuindo o custo computacional. Com isso, pode-se prever sistemas de estimação de DOA mais simples, compactos e baratos.

Finalmente, como perspectivas futuras destaca-se a possibilidade de confrontar os resultados de simulação apresentados neste trabalho com aqueles que porventura venham a ser obtidos empregando uma plataforma real de testes. Além disso, melhorias nos algoritmos podem ser sugeridas para garantir convergência e estabilidade.

REFERÊNCIAS

- [1] R. A. Monzingo e T. W. Miller, "Introduction to Adaptive Arrays," Wiley, New York, 1980.
- [2] R. O. Schmidt, "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation," *IEEE Transactions in Antennas and Propagation*, Vol. AP-34, pp. 276-280, Mar. 1986.
- [3] R. Roy e T. Kailath, "Esprit – Estimation of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques", *IEEE Transactions in Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vol. 37, No. 7, pp. 984-995, Jul. 1989.
- [4] E. Candès, J. Romberg e T. Tao, "Robust uncertainty principles: Exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information," *IEEE Transacton on Information Theory*, vol. 52, no. 2, pp. 489-509, Fev. 2006.
- [5] E. Candès e T. Tao, "Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?," *IEEE Transacton on Information Theory*, vol. 52, no. 12, pp. 5406-5425, Dez. 2006.
- [6] D. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Transacton on Information Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Abr. 2006.
- [7] S. Chen, D. Donoho, e M. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," *SIAM J. Scientific Computing*, vol. 20, no. 999.
- [8] I. Daubechies, M. Defrise e C. de Mol, "An iterative thresholding algorithm for linear inverse problems with a sparsity constraint," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 57, pp. 1413-1457, 2004.
- [9] S.G. Mallat e Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, Dez. 1993.
- [10] J. Tropp e A.C. Gilbert, "Signal recovery from partial information via orthogonal matching pursuit," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 53, no. 12, pp. 4655-4666, 2007.
- [11] S. Chen, C.F.N. Cowan, e P.M. Grant, "Orthogonal least squares learning algorithm for radial basis function networks," *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 2, pp. 302-309, 1991.
- [12] E. Candès e T. Tao, "Decoding by linear programming", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 51, no. 12, pp. 4203-4215, Dez. 2005.
- [13] T. Blumensath e M. E. Davies, "Iterative Thresholding for Sparse Approximations", *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Vol. 14, No. 5-6, pp. 629-654, Dec. 2008.
- [14] D. Needell e J.A. Tropp, "CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 26, no. 3, pp. 301-321, Mai. 2009.
- [15] S. Mallat e Z. Zhang, "Matching Pursuits with time-frequency dictionaries," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 12, pp. 3397-3415, 1993.