

# Modelo para Rastreo e Estimação de Alvos em Trajetórias Tridimensionais

Jair Agner Júnior<sup>13</sup>, Marcos dos Santos<sup>124</sup> e Carlos Francisco Simões Gomes<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Centro de Análises de Sistemas Navais (CASNAV), Rio de Janeiro/RJ

<sup>2</sup>Instituto Militar de Engenharia (IME), Rio de Janeiro/RJ

<sup>3</sup>Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC), Petrópolis/RJ

<sup>4</sup>Universidade Federal Fluminense (UFF), Niterói/RJ

**Resumo**— Acompanhar alvos é um processo complexo, o qual exige algoritmos de associação capazes de lidar com o uso de técnicas de filtragem lineares e não-lineares. Sabe-se que os modelos bidimensionais de sistemas de controle de tráfego aéreo, mostram-se insuficientes para o tratamento de manobras tridimensionais de alvos militares, devido as consideráveis variações de altitude. O trabalho abrange modelos de dinâmica de voo, que descrevem a evolução do estado de um alvo, tratado como objeto pontual em trajetórias tridimensionais, sendo abordando o problema da incerteza do seu movimento. Esse modelo tem aplicação em sistemas de navegação e vigilância civis e militares, permitindo o rastreamento de alvos em tempo real. Adotou-se como estimadores de estado o Filtro de Kalman Linear (FK) e o Filtro de Kalman Estendido (FKE) com integração através do filtro de sistemas híbridos Múltiplos Modelos Interagentes (IMM). Exemplos numéricos ilustram a aplicabilidade e desempenho do método proposto.

**Palavras-Chave**— Rastreo de alvos, Modelos Matemáticos, Filtragem de Kalman.

## I. INTRODUÇÃO

A proposta deste trabalho é mostrar um modelo que teve como foco o rastreo de aeronaves militares de asa fixa, com deslocamento tridimensional, com informações de posição obtidas de um sensor radar, com a conversão dos dados desse emissor para coordenadas cartesianas, e a partir destas obter as informações de velocidades para compor o vetor de medidas. O problema de rastreamento de alvos manobrantes, é uma tarefa complexa, exigindo diversos estudos e análises variadas, não só de ordem conceitual, mas também de ordem prática. Diversos modelos tem sido desenvolvidos para aprimorarem as soluções existentes, como os descritos em [1], [2], [3] entre outros.

O problema de rastreamento tem origem na teoria da estimação, cujo propósito é desenvolver estimadores, também denominados de filtros, os quais tenham a possibilidade de serem aplicados na prática em diversos problemas de engenharia tais como, estimação de órbita e altitude, navegação integrada, vigilância e determinação do posicionamento futuro de alvos por radar ou sonar, sistemas de potência, detecção de falhas, entre outros [4]. Neste

contexto, a filtragem consiste em se estimar as variáveis de estado de um sistema estocástico linear ou não linear. Com a função de representar essas variáveis de estado de maneira aproximada, são desenvolvidos modelos para serem utilizados nas filtrações, permitindo que haja uma melhor estimação das posições futuras dos alvos.

Entre os diversos modelos dinâmicos existentes, foram escolhidos dois para o desenvolvimento deste trabalho, o modelo CV (Velocidade Constante), implementado com o FK e o modelo CT (Giro Constante), implementado com o FKE. Estes modelos representam casos particulares do modelo de cinemática do movimento curvilíneo planar (CLM) com dinâmica de movimento bidimensional [5]. A escolha de mais de um modelo se deve à possibilidade de um alvo experimentar diferentes padrões de comportamento ao longo do tempo, e esses modelos foram selecionados porque podem representar de forma adequada os possíveis movimentos de um alvo manobrando, visto que, é preciso que tanto as técnicas de filtragem lineares como as não-lineares sejam implementadas.

Para utilizar mais de um modelo em um problema de estimação de estados, deve-se fazer uso de uma técnica que permita a utilização de modelos em paralelo. A abordagem adotada para trabalhar com múltiplos modelos paralelamente foi o algoritmo IMM, proposto por [6].

## II. MÚLTIPLOS MODELOS INTERAGENTES (IMM)

A principal vantagem do IMM é estimar o estado de um sistema dinâmico e sua respectiva matriz de covariância através da soma ponderada das estimativas de  $N$  modelos de FK executados em paralelo. O IMM é uma ferramenta de estimação adaptativa de estados em sistemas híbridos, que segue os processos de uma cadeia de Markov, em que a cada iteração são calculados os fatores de ponderação para a combinação das estimativas de cada um dos modelos de filtro. Neste contexto, sistemas híbridos referem-se a necessidade de fazer uso tanto de técnicas de filtragem lineares como não-lineares. A implementação de tais técnicas se deve à possibilidade de um alvo experimentar diferentes padrões de comportamento ao longo do tempo, e o uso de um único FK se torna ineficiente para adaptar-se a essas variações do movimento. Dessa forma, fez-se uso do IMM para trabalhar simultaneamente com o FK (utilizando o modelo CV) e com o FKE (utilizando o modelo CT).

Jair Agner Júnior, jairagner@yahoo.com.br; Marcos dos Santos, marcosdossantos\_doutorado\_uff@yahoo.com.br; Carlos Francisco Simões Gomes, cfsg@bol.com.br.

### III. MODELOS MATEMÁTICOS

Muitas das técnicas de rastreamento de alvos são descritas através de modelos, que baseiam-se nos aspectos de comportamento e observações do alvo. O comportamento é normalmente representado na forma de um modelo dinâmico ou de movimento, também chamado de modelo de estados, descrevendo a evolução de diversas grandezas físicas como posição, velocidade etc. O aspecto que trata das observações do alvo é representado através de modelos de observação. Dessa forma, para tratar adequadamente o problema de rastreamento, iremos descrever os modelos matemáticos, levando em conta as equações, variáveis e parâmetros pertinentes.

As Equações (1) e (2) definem o FK e o FKE, que são descritos de forma detalhada com aplicações em [4], [7] e [8]. Entretanto neste trabalho o filtro de Kalman soluciona o problema geral de buscar estimar o estado  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^8$  de um processo controlado em tempo discreto que é governado pela equação de diferença estocástica linear (1), com uma medição  $\mathbf{z}_k \in \mathbf{R}^5$  (2) descritas por:

$$\mathbf{x}_{k+1} = F_k \mathbf{x}_k + G_k \mathbf{u}_k + B_k \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{z}_{k+1} = H_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1} \quad (2)$$

A estimação de estados efetuada pela Equação (1) obedece as leis que governam o movimento da aeronave. Essas leis, assim como a abordagem adotada para o cálculo das medições efetuadas pela Equação (2), serão descritas mais adiante. As variáveis aleatórias  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_{k+1}$  representam o ruído de processo e ruído de medição, respectivamente. Elas são consideradas ruídos tipo branco (gaussiano), independentes, com distribuição de probabilidade contínua, normal, identicamente distribuídas, com média zero e covariância  $Q$  e  $R$ , respectivamente. Assim,  $p(\mathbf{w}) \sim N(0, Q)$  e  $p(\mathbf{v}) \sim N(0, R)$ . A matriz  $F_{8 \times 8}$  de transição de estados, na Equação (1), refere-se ao estado da amostra no intervalo de tempo anterior  $k$ , para o estado atual no tempo  $k + 1$ , na ausência de uma função de condução ou ruído do processo. A matriz  $G_{8 \times 5}$  refere-se a entrada de controle opcional  $\mathbf{u}_k \in \mathbf{R}^5$  para o estado  $\mathbf{x}_{k+1}$ . Nesta abordagem, a entrada de controle  $\mathbf{u}_k$  pode ser atribuída como o ruído da posição do sensor que faz a medição da posição do alvo. Dessa forma, o movimento do sensor tem influência sobre a posição do alvo. A matriz  $G_{8 \times 5}$  controla os efeitos de  $\mathbf{u}_k$ , e como neste trabalho é considerado um observador estático, o termo  $G_k \mathbf{u}_k$  não é incorporado na equação do processo. A matriz  $B_{8 \times 5}$  controla os efeitos de  $\mathbf{w}_k$ . A matriz  $H_{5 \times 8}$ , na Equação de medição (2), relaciona o estado à medida  $\mathbf{z}_{k+1}$ .

Para o modelo de observações do alvo, utilizamos como referência medidas do sistema radar. Estas medidas, assumidas não tendenciosas, são representadas em forma de vetor  $\mathbf{z}_k = [\mathbf{r}_k \ \theta_k \ \phi_k]^T$ , onde  $\mathbf{r}_k$  é a distância em metros do alvo ao observador,  $\theta_k$  é o ângulo de azimute em graus medido desde o norte geográfico ao centro do alvo e  $\phi_k$  é o ângulo de elevação em graus medido desde um referencial horizontal nulo (plano horizontal, no caso nível do mar) ao centro do alvo. Sabe-se que estas medidas são perturbadas

por ruídos (ou erros), na distância ( $\mathbf{v}_k^d$ ), no ângulo de azimute ( $\mathbf{v}_k^\theta$ ) e no ângulo de elevação ( $\mathbf{v}_k^\phi$ ), os quais são assumidos independentes e estacionários com distribuição Gaussiana de média zero e variâncias constantes  $\sigma_d$ ,  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_\phi$ , respectivamente.

Neste trabalho, o alvo foi tratado como objeto pontual (ou particular), descrito em três dimensões, com vetor posição representado por  $\mathbf{r}(t) = [\mathbf{x}(t) \ \mathbf{y}(t) \ \mathbf{h}(t)]^T$ , em coordenadas cartesianas. Sendo assim, para o modelo dinâmico ou de movimento, foram utilizadas como variáveis de estado  $x$ ,  $y$  (coordenadas horizontais),  $h$  (altitude),  $\chi$  (ângulo de proa ou rumo),  $\gamma$  (ângulo de trajetória),  $\mathbf{v}$  (vetor velocidade) e  $\mathbf{a}$  (vetor aceleração).

As equações (3), (4) e (5) são obtidas a partir da derivada das componentes de  $\mathbf{r}(t)$ , e descrevem a velocidade do alvo em função das coordenadas cartesianas relacionando a velocidade tangencial instantânea  $\mathbf{v}(t)$ ,  $\gamma$  e  $\chi$ .

$$\mathbf{v}_x(t) = \mathbf{v}(t) \cdot \cos(\chi(t)) \cdot \cos(\gamma(t)) \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_y(t) = \mathbf{v}(t) \cdot \sin(\chi(t)) \cdot \cos(\gamma(t)) \quad (4)$$

$$\mathbf{v}_h(t) = \mathbf{v}(t) \cdot \sin(\gamma(t)) \quad (5)$$

A diferenciação das equações (3), (4) e (5) resultam em equações diferenciais de segunda ordem, que rearranjadas podem ser reescritas respectivamente por (6), (7) e (8):

$$\mathbf{a}_x(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \cos(\chi(t)) \cdot \cos(\gamma(t)) - \mathbf{v}_y(t) \cdot \dot{\chi}(t) - \mathbf{v}_h(t) \cdot \cos(\chi(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{a}_y(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \sin(\chi(t)) \cdot \cos(\gamma(t)) + \mathbf{v}_x(t) \cdot \dot{\chi}(t) - \mathbf{v}_h(t) \cdot \dot{\gamma}(t) \quad (7)$$

$$\mathbf{a}_h(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \sin(\gamma(t)) + \frac{\mathbf{v}_y(t)}{\sin(\chi(t))} \cdot \dot{\gamma}(t) \quad (8)$$

Sabendo que  $\dot{\chi}(t)$  é a taxa de variação angular horizontal e  $\dot{\gamma}(t)$  é a taxa de variação angular vertical de um alvo.

Para esse modelo deve ser considerado que atuam sobre o alvo, a aceleração tangencial e a aceleração normal ou centrípeta. A aceleração tangencial  $\mathbf{a}_{tg}$  (9) é tangencial ao movimento e provoca a variação do módulo da velocidade do corpo. A aceleração centrípeta  $\mathbf{a}_{cp}$  é perpendicular ao movimento e modifica a direção da velocidade, possuindo uma componente horizontal  $\mathbf{a}_{cp\chi}$  (10) e outra vertical  $\mathbf{a}_{cp\gamma}$  (11).

$$\mathbf{a}_{tg} = \dot{\mathbf{v}}(t), \quad (9)$$

$$\mathbf{a}_{cp\chi} = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \dot{\chi}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \omega_\chi(t) \quad (10)$$

$$\mathbf{a}_{cp\gamma} = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) \cdot \omega_\gamma(t) \quad (11)$$

#### A. Dedução dos Modelos CV e CT

Baseado em [5], que descreve o modelo CLM de forma bidimensional, foram deduzidos os modelos CV e CT tridimensionais aqui apresentados. O alvo no modelo CV, que também é conhecido como modelo de Movimento Retilíneo Uniforme, se movimenta com velocidade constante e em linha reta. Dessa forma,  $\mathbf{v}_x(t)$ ,  $\mathbf{v}_y(t)$  e  $\mathbf{v}_h(t)$  são constantes, e  $\mathbf{a}_{tg}$ ,  $\mathbf{a}_{cp\chi}$  e  $\mathbf{a}_{cp\gamma}$  são nulas. Consequentemente,  $\mathbf{a}_x(t)$ ,  $\mathbf{a}_y(t)$  e  $\mathbf{a}_h(t)$  são nulas.

No modelo CT o alvo se movimenta com velocidade e taxa de giro constantes. Assim,  $\mathbf{v}_x(t)$ ,  $\mathbf{v}_y(t)$  e  $\mathbf{v}_h(t)$  são constantes. A  $\mathbf{a}_{tg}$ ,  $\mathbf{a}_{cp\chi}$  e  $\mathbf{a}_{cp\gamma}$ , são dadas respectivamente por (12), (13) e (14). A partir das mesmas obtemos  $\mathbf{a}_x(t)$ ,  $\mathbf{a}_y(t)$  e  $\mathbf{a}_h(t)$ , que são dadas respectivamente por (15), (16) e (17).

$$\mathbf{a}_{tg} = \dot{\mathbf{v}}(t) = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_{cp\chi} = \mathbf{v}(t) \cdot \omega_\chi(t) = cte \quad (13)$$

$$\mathbf{a}_{cp\gamma} = \mathbf{v}(t) \cdot \omega_\gamma(t) = cte \quad (14)$$

$$\mathbf{a}_x(t) = -\mathbf{v}_y(t) \cdot \omega_\chi(t) - \mathbf{v}_h(t) \cdot \cos(\chi(t)) \cdot \omega_\gamma(t) \quad (15)$$

$$\mathbf{a}_y(t) = \mathbf{v}_x(t) \cdot \omega_\chi(t) - \mathbf{v}_h(t) \cdot \omega_\gamma(t) \quad (16)$$

$$\mathbf{a}_h(t) = \frac{\mathbf{v}_y(t)}{\sin(\chi(t))} \cdot \omega_\gamma(t) \quad (17)$$

Passemos a trabalhar com a Equação (1) em tempo contínuo e derivando a mesma em função do tempo, temos a seguinte equação vetorial de processo em tempo contínuo:

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + U \quad (18)$$

Em (18),  $X(t)$  é o vetor de estados definido por (19) e  $\dot{X}(t)$  é definido por (20).  $A(t)$  é a matriz auxiliar de dedução da matriz de transição de estados  $F$  da Equação (1). Face a limitação de espaço, foi suprimido o "(t)" dos componentes dos vetores  $X(t)$  e  $\dot{X}(t)$ :

$$X(t) = [ \mathbf{x} \quad \mathbf{v}_x \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{v}_y \quad \mathbf{h} \quad \mathbf{v}_h \quad \omega_\chi \quad \omega_\gamma ]^T \quad (19)$$

$$\dot{X}(t) = [ \dot{\mathbf{x}} \quad \mathbf{a}_x \quad \dot{\mathbf{y}} \quad \mathbf{a}_y \quad \dot{\mathbf{h}} \quad \mathbf{a}_h \quad 0 \quad 0 ]^T \quad (20)$$

$U$  é o ruído de processo em tempo contínuo, visto como uma perturbação na velocidade e na taxa de giro, definido por (21) para o Modelo CV e por (22) para o Modelo CT:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{w}, \quad (21)$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \mathbf{w} \quad (22)$$

$\mathbf{w}$  é o ruído em cada um dos eixos cartesianos ( $w_x$ ,  $w_y$  e  $w_h$ ) e nas taxas de giro ( $w_\chi$  e  $w_\gamma$ ), sendo dado por:  $\mathbf{w} = [w_x \quad w_y \quad w_h \quad w_\chi \quad w_\gamma]^T$ .

A matriz  $A$ , para o modelo CV é obtida substituindo (19), (20) e (21) em (18), sendo dada por (23), e para o modelo CT, substituindo (19), (20) e (22) em (18) sendo dada por (24):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_\chi(t) & 0 & -\cos(\chi(t))\omega_\gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_\chi(t) & 0 & 0 & 0 & -\sin(\chi(t))\omega_\gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_\gamma(t)}{\sin(\chi(t))} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

O processo de medição radar tem uma natureza de tempo discreto, sendo aqui representado por  $T_k$ . A discretização da equação vetorial do processo (18), com período de amostragem  $T_k$  é feita utilizando a expansão em séries de Taylor em segunda ordem, sendo dado por (25):

$$\hat{X}_{k+1|k} = X_k + T_k \cdot \dot{X}_k + \frac{T_k^2}{2} \cdot \ddot{X}_k \quad (25)$$

Na qual  $X_k$  é o vetor de estados (19),  $\dot{X}_k$  é a equação de (18) e  $A_k$  é a matriz de transição de estados, dada por (23) ou (24), na forma discreta, tendo como base o instante de tempo  $k$ . O intervalo de tempo entre medições sucessivas, originárias de um mesmo objeto, é definido como  $T_k = t_{k+1} - t_k$ . O “^” representa valor estimado, dessa forma  $\hat{X}_{k+1|k}$  é o valor de  $X$  estimado no instante de tempo ( $k+1$ ) com base no valor do instante anterior  $k$ . Assim, (18) de forma discreta passa a ser escrita como (26).  $\dot{X}_k$  na Equação (27) representa a derivada da Equação (26) em relação a  $k$ , para  $U$  constante.

$$\dot{X}_k = A \cdot X_k + U \quad (26)$$

$$\ddot{X}_k = A \cdot \dot{X}_k \quad (27)$$

Substituindo as Equações (26) e (27) em (25) obtemos a Equação (28):

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k} &= (I + T_k \cdot A + \frac{T_k^2}{2} \cdot A^2) \cdot X_k \\ &+ (I \cdot T_k + \frac{T_k^2}{2} \cdot A) \cdot U \\ &= F_k \cdot X_k + W_k \end{aligned} \quad (28)$$

Na Equação (28),  $I$  é a matriz identidade, e pode-se observar que pela mesma temos os valores de  $F_k$  e  $W_k$  para os modelos CV e CT. Assim, para o modelo CV, substituindo estes  $A_k$  de (23) e  $U_k$  de (21) em (28), passamos a ter a equação do processo (29):

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k+1|k} &= \begin{bmatrix} 1 & T_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & T_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \hat{X}_{k|k} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{T_k^2}{2} & 0 & 0 \\ T_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_k^2}{2} & 0 \\ 0 & T_k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_k^2}{2} \\ 0 & 0 & T_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_h \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

Para o modelo CT, substituindo as equações (22) e (24) na Equação (28), passamos a ter uma equação vetorial do processo do modelo CT. Entretanto, devido a componente  $F_k \cdot X_k$  dessa equação ser uma função de transição de estados não linear (simbolizada por  $f(k, X_k)$ ), utilizamos o processo de linearização descrito em [4], para tratar este problema da não linearidade intrínseco ao modelo de FKE. Aplicando o cálculo do Jacobiano na função vetorial  $f(k, X_k)$ , obtemos a matriz  $F_{l|k}$  linearizada. Assim, a equação de processo linearizada para o modelo CT ( $\hat{X}_{k+1|k}$ ) é representada por (30), onde alguns de seus componentes seguem destacados devido limitação de espaço:

$$a_{16} = b_{23} = -\cos(\chi_k)\omega_{\gamma k}\frac{T_k^2}{2}; a_{26} = -\cos(\chi_k)\omega_{\gamma k}T_k + \sin(\chi_k)\omega_{\chi k}\omega_{\gamma k}\frac{T_k^2}{2}; a_{24} = -\omega_{\chi k}T_k - \cos(\chi_k)\frac{\omega_{\gamma k}^2}{\sin(\chi_k)}\frac{T_k^2}{2}; a_{36} = b_{43} = -\sin(\chi_k)\omega_{\gamma k}\frac{T_k^2}{2}; a_{44} = 1 - (\omega_{\chi k}^2 + \omega_{\gamma k}^2)\frac{T_k^2}{2}; a_{46} = -\sin(\chi_k)\omega_{\gamma k}T_k - \cos(\chi_k)\omega_{\chi k}\omega_{\gamma k}\frac{T_k^2}{2}; e a_{66} = 1 - \omega_{\gamma k}^2\frac{T_k^2}{2}.$$

$$\hat{X}_{k+1|k} = \begin{bmatrix} 1 & T_k & 0 & -\omega_{\chi k}\frac{T_k^2}{2} & 0 & a_{16} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \omega_{\chi k}^2\frac{T_k^2}{2} & 0 & a_{24} & 0 & a_{26} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{\chi k}\frac{T_k^2}{2} & 1 & T_k & 0 & a_{36} & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{\chi k}T_k & 0 & a_{44} & 0 & a_{46} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega_{\gamma k}}{\sin(\chi_k)}\frac{T_k^2}{2} & 1 & T_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{\gamma k}\omega_{\chi k}}{\sin(\chi_k)}\frac{T_k^2}{2} & 0 & \frac{\omega_{\gamma k}}{\sin(\chi_k)}T_k & 0 & a_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \hat{X}_{k|k} + \begin{bmatrix} \frac{T_k^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_k & -\omega_{\chi k}\frac{T_k^2}{2} & b_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_k^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \omega_{\chi k}\frac{T_k^2}{2} & T_k & b_{43} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{T_k^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{\gamma k}}{\sin(\chi_k)}\frac{T_k^2}{2} & T_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_h \\ w_{\chi} \\ w_{\gamma} \end{bmatrix} \quad (30)$$

Segundo [9], podemos assumir os ruídos  $w_x, w_y, w_h, w_{\chi}$  e  $w_{\gamma}$  como independentes com média zero e variâncias  $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_h^2, \sigma_{\omega_{\chi}}^2$  e  $\sigma_{\omega_{\gamma}}^2$  respectivamente. Para matriz de covariância dos ruídos associados ao estado ( $Q_k$ ), assumiremos  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_h^2 = \sigma_q^2$ .  $Q_k$  é obtido fazendo:  $Q_k = E[W_k \cdot W_k^T]$ .

### B. Definição da Equação de Medida

O sistema radar fornece o vetor de medidas  $\mathbf{z}_k$  em coordenadas polares. Foi realizada uma transformação não linear, de modo que passasse a ser descrito como  $\mathbf{z}_k = [\mathbf{x}_k^z \ \mathbf{v}_{xk}^z \ \mathbf{y}_k^z \ \mathbf{v}_{yk}^z \ \mathbf{h}_k^z \ \mathbf{v}_{hk}^z \ \omega_{\chi k}^z \ \omega_{\gamma k}^z]^T$ , para relacionar este vetor com o vetor de estados do alvo  $\mathbf{x}_k$  (definido em coordenadas cartesianas) de cada um dos filtros. Para isso foram adotadas duas etapas: a primeira consiste em transformar a medida em coordenadas cartesianas antes da entrada no filtro. A segunda, devido à natureza não linear da transformação, há a necessidade de utilização das equações do FKE, para tratar a não linearidade.

Por meio de uma função de transformação trigonométrica, as medidas de distância ( $\mathbf{r}_k$ ), ângulo de azimute ( $\theta_k$ ) e ângulo de elevação ( $\phi_k$ ), obtidas em um sistema de coordenadas polares, são calculados os componentes de posição em coordenadas cartesianas ( $x, y$  e  $h$ ) da seguinte forma:  $\mathbf{x}_k^z = \mathbf{r}_k \cdot \cos(\theta_k) \cdot \cos(\phi_k)$ ;  $\mathbf{y}_k^z = \mathbf{r}_k \cdot \sin(\theta_k) \cdot \cos(\phi_k)$ ; e  $\mathbf{h}_k^z = \mathbf{r}_k \cdot \sin(\phi_k)$ .

Para calcular os componentes de velocidade de  $\mathbf{z}_k$ , foi utilizado o cálculo simples da velocidade média, através dos dados de medida de posição atual  $\mathbf{z}_k$  e anterior  $\mathbf{z}_{k-1}$ , da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_{Mk}^z = \frac{\mathbf{v}_{Mk}^z - \mathbf{v}_{M(k-1)}^z}{2}, \quad \text{onde } M = x, y \text{ e } z \quad (31)$$

Os ângulos de azimute e elevação do alvo, em cada amostragem, são obtidos a partir da projeção destes vetores velocidades. Dessa forma a velocidade angular  $\omega_{\chi k}^z$  pôde ser obtida a partir da diferença entre o ângulo de azimute atual e o anterior, divididos pelo tempo. Foi aplicado o mesmo procedimento para obtenção de  $\omega_{\gamma k}^z$ , a partir do ângulo de elevação. Seguindo o mesmo princípio, acelerações angulares, que foram utilizadas na matriz  $H_{k+1}$ , foram obtidas a partir da diferença entre a velocidade angular atual e a anterior, divididas pelo tempo entre as mesmas.

A transformação não linear do vetor de medidas utilizada é dada por  $\mathbf{r}_k, \theta_k$  e  $\phi_k$ , definidos em (32):

$$\mathbf{r}_k = \sqrt{\mathbf{x}_k^2 + \mathbf{y}_k^2 + \mathbf{h}_k^2}, \quad \theta_k = \arctan\left(\frac{\mathbf{x}_k}{\mathbf{y}_k}\right) \quad e \\ \phi_k = \arctan\left(\frac{\mathbf{h}_k}{\sqrt{\mathbf{x}_k^2 + \mathbf{y}_k^2}}\right) \quad (32)$$

Assim, a função vetorial não linear que relaciona as variáveis de estado às medidas, denotada por  $fh(k+1, \mathbf{x}_{k+1})$ , é dada por (33):

$$fh(k+1, \mathbf{x}_{k+1}) = \begin{bmatrix} fh1 = \sqrt{\mathbf{x}_{k+1}^2 + \mathbf{y}_{k+1}^2 + \mathbf{h}_{k+1}^2} \\ fh2 = \arctan\left(\frac{\mathbf{x}_{k+1}}{\mathbf{y}_{k+1}}\right) \\ fh3 = \arctan\left(\frac{\mathbf{h}_{k+1}}{\sqrt{\mathbf{x}_{k+1}^2 + \mathbf{y}_{k+1}^2}}\right) \\ fh4 = \omega_{\chi k}^z \\ fh5 = \omega_{\gamma k}^z \end{bmatrix} \quad (33)$$

A matriz da covariância dos ruídos associados à medida ( $R_{k+1}$ ) adotada é dada por (34):

$$R_{k+1} = \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{\omega_{\chi}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\omega_{\gamma}} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Devido a necessidade de linearização, foi calculada a matriz jacobiana da função  $fh(k+1, \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})$ . A matriz resultante obtida foi denotada por  $H_{k+1}$ , sendo definida por (35), onde seus componentes  $a_{13}$  e  $a_{23}$  seguem destacados devido limitação de espaço:  $a_{13} = \frac{-\mathbf{x}\mathbf{h}}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{h}^2)}$ ; e

$$a23 = \frac{-yh}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+h^2)}$$

$$H_{k+1} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} & \frac{y}{x^2+y^2+h^2} & a13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} & \frac{-x}{x^2+y^2+h^2} & a23 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+h^2}} & 0 & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dot{\omega}_\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dot{\omega}_\gamma \end{bmatrix}^T \quad (35)$$

Para inicialização dos modelos, foram consideradas as duas primeiras medidas, conforme apresentado em [4]. Um método de inicializar a matriz de covariância é defini-la como  $P_{0|0} = \alpha^2 \cdot Q_k$ , sendo o valor típico de  $\alpha = 10$ .  $Q_k$  representa a covariância dos erros associados ao processo.

O ruído do processo para ambos os modelos é definido como ruído branco na aceleração, com a diferença que no modelo CT é adicionado ruído na parcela de giro. Desta forma, o desvio padrão do ruído de processo ( $\sigma_q$ ) para o modelo CV foi definido como em [4],  $\sigma_q = \alpha \cdot a_{max}$ , onde  $0 < \alpha \leq 1$  e  $a_{max}$  é a aceleração máxima esperada. Normalmente para este modelo é selecionado um nível de ruído baixo. Foram definidos empiricamente  $\alpha = 0.7$  e  $a_{max} = 5m/s^2$ , com isso,  $\sigma_q = 3,5m/s^2$ . Geralmente no modelo CT o nível de ruído é maior que no modelo CV, visto que o nível de incerteza é maior no momento das manobras. Foram definidos empiricamente  $\alpha = 0.8$ ,  $a_{max} = 125m/s^2$  para o CT. Assim, definiu-se o desvio padrão do ruído do processo como:  $\sigma_q = 100m/s^2$ , e os ruídos nas taxas de giro como  $\sigma_{\omega_\chi} = \sigma_{\omega_\gamma} = 0.044rad/s^2$  para o modelo CT. Também definiu-se empiricamente os valores dos ruídos das taxas de aceleração angular como  $\sigma_{\dot{\omega}_\chi} = \sigma_{\dot{\omega}_\gamma} = 5rad/s^2$ . Os ruídos de medida dependem diretamente das características do sensor modelado. Nas trajetórias em que estes ruídos foram considerados, utilizou-se um desvio padrão na distância de  $\sigma_r = 75m$ , no ângulo de azimute de  $\sigma_\theta = 0.0175^\circ$  e no ângulo de elevação de  $\sigma_\phi = 0.0175^\circ$ , como em [10].

Para a definição dos elementos da matriz de transição (II) do algoritmo IMM, foi considerado o tempo de rotação da antena de 2 segundos, o tempo esperado de execução do CV de 200 segundos e o tempo esperado de execução do CT de 20 segundos, assim II é dado por (36):

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (36)$$

#### IV. TESTES E RESULTADOS

Para avaliar o modelo, foi realizar um comparativo com alguns resultados apresentados em [10] e [11]. Estes foram escolhidos para comparação com os resultados deste trabalho, por serem trabalhos relativamente recentes, apresentarem modelos tridimensionais com uma técnica inovadora para cálculo da velocidade angular e com testes descritos

em um nível de detalhamento suficiente para permitir sua reprodução e comparação. As trajetórias comparadas com [10] são tipo zigue-zague, formadas por sete trechos, como na Figura 1 (a).

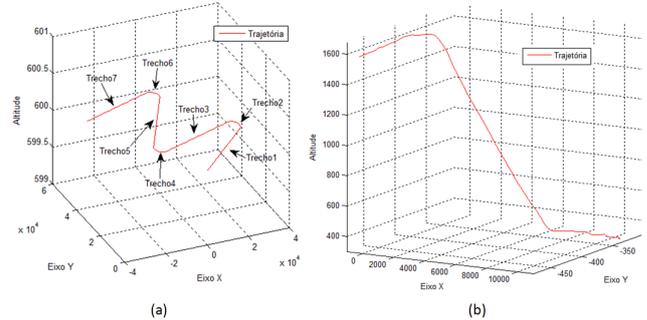


Fig. 1 - (a)Trajetória Manobra Zigue-zague. (b)Trajetória real com alteração de altitude.

O critério de desempenho adotado, foi baseado na verificação de erros RMS (erro médio quadrático) para diferentes tipos de trajetórias realizadas por um alvo, com evolução no tempo para o vetor de posições, sendo dado por (37):

$$RMS_k^i = \sqrt{\frac{1}{k} (res_k^i)^T res_k^i}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad i = x, y \text{ ou } h \quad (37)$$

Onde  $k$  é o instante de tempo,  $i$  são os eixos cartesianos,  $res_k^i \in \mathbf{R}$  são vetores cujos elementos são diferenças entre a posição real e a estimativa da posição de cada componente, e  $n$  é o número de dados da trajetória ou do trecho da trajetória. A partir dos  $n$  valores obtidos de  $RMS_k^i$ , calculou-se o RMS médio para cada componente de posição, dado por (38):

$$\overline{RMS}_i = \frac{\sum_{k=1}^n RMS_k^i}{n}, \quad i = x, y \text{ ou } h \quad (38)$$

Os critérios adotados por [10], também aqui utilizados, foram a média dos  $\overline{RMS}_i$  (38), e a norma de  $\overline{RMS}$  (39):

$$\|\overline{RMS}\|_{xyz} = \sqrt{\overline{RMS}_x^2 + \overline{RMS}_y^2 + \overline{RMS}_z^2} \quad (39)$$

Para que a comparação fosse válida, foram adotados os mesmos parâmetros de ajustes citados em [10]. Sendo assim,  $T = 4s$ ,  $\sigma_r^2 = 75^2$ ,  $\sigma_\chi^2 = 0,0175^2$  e  $\sigma_\gamma^2 = 0,0175^2$ , em que  $T$  é o período de amostragem,  $\sigma_r^2$  é a variância do alcance radar,  $\sigma_\chi^2$  é a variância do ângulo de azimute e  $\sigma_\gamma^2$  é a variância do ângulo de elevação. Assim como em [10], considerou-se a estimativa inicial de estado sendo dada por  $\hat{x}_{0|0} = [-30000m \quad 196,16m/s \quad -30000m \quad 154,98m/s \quad 600 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$ .

Para exemplificar a comparação realizada, foi selecionada apenas uma trajetória descrita em [10]. A mesma se dá em um plano com inclinação de  $+30^\circ$  em relação ao plano  $xy$ .

Comparando (a) e (b) da Figura 2, o modelo deste trabalho obteve um desempenho superior ao de [10], tanto para cada um dos sete trechos apresentados quanto para a trajetória como um todo.

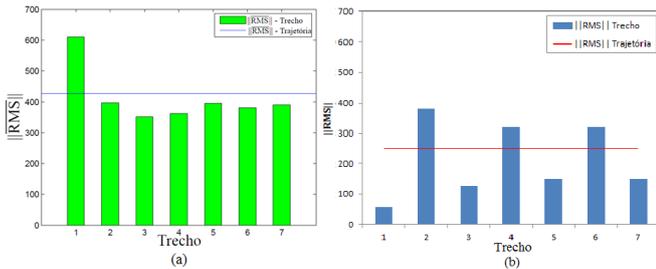


Fig. 2 - Gráfico de  $\|\overline{RMS}\|$ . Inclinado  $30^\circ$ . (a)Fonte: [10]. (b)modelos deste trabalho.

A outra forma utilizada para se avaliar este trabalho foi a comparação com dados reais. Dessa forma, foi realizado testes de comparação entre o modelo desenvolvido, utilizando as hipóteses adotadas para os ruídos descritas anteriormente, com sistema real utilizado em Navios da Marinha do Brasil (MB). Os dados reais da trajetória das aeronaves utilizados nos testes foram obtidos dos testes de validação de um navio da MB. Os testes de validação se destinavam a verificar o resultado de solução de tiro para o disparo de um projétil de canhão de 4,5 polegadas, ao acompanhar aeronaves de asa fixa. Utilizou-se como referência para origem o sistema cartesiano  $(x, y, h)$ . As trajetórias foram percorridas pelas aeronaves com uma velocidade em torno de 360km/h. As duas primeiras trajetórias foram percorrendo um trajeto com movimento vertical ascendente (ilustrada na Figura 1 (b)), e a terceira percorrendo um trajeto com movimento de alteração de rumo horizontal. A primeira possui posição inicial (7647.43, -325.31, 315.83) e final (-699.03, -462.62, 1571.95). A segunda possuía posição inicial (-5466.93, -3010.67, 285.87) e final (1797.83, -3026.43, 1552.44). A terceira possuía posição inicial (6376.27, -191.34, 313.88) e final (1118.47) -6900.68, 289.83). Para a primeira trajetória, a comparação entre resultados mostrou uma melhoria de 44,497% no desempenho do modelo proposto quando comparado aos dados obtidos nos testes de validação. Para a segunda mostrou uma melhoria de 43,919% e para a terceira uma melhoria de 36,153%).

## V. CONCLUSÕES

Para modelar a Equação de processo (1) e a Equação de medida (2), os modelos estudados e desenvolvidos neste trabalho foram baseados no sistema de coordenadas cartesianas, onde há a necessidade de conversão do sistema de coordenadas esféricas, das observações do radar, para o cartesiano.

Para tratar o rastreamento dos alvos, sobretudo com a preocupação de mudança no seu perfil de deslocamento, foram escolhidos o modelo CV e o modelo CT. Com base nestes modelos bidimensionais, foram desenvolvidos, os modelos CV e CT tridimensionais. Analisando os resultados dos testes realizados com estes modelos, apresentados no item IV, foi possível verificar que tanto o CV como o CT tridimensionais, são capazes de reproduzir adequadamente todas as trajetórias testadas.

O modelo CT deduzido é o mais interessante, pois ele lida com curvas que ocorrem em planos arbitrários do espaço, aumentando o número de trajetórias que podem ser executadas por um alvo. Esta trajetória está contida em um plano horizontal, isto é, um plano paralelo ao plano formado pelos eixos  $x$  e  $y$ , mas que é rotacionado no eixo  $z$ . As matrizes que compõe a equação de processo e de medida são descritas em função de variáveis cartesianas de posição e velocidade, além das velocidades angulares.

Foi descrito como se obteve as informações das velocidades escalares de cada eixo cartesiano, para fazerem parte do vetor de observações  $\mathbf{z}_k$ . As velocidades foram deduzidas a partir das informações da medida atual e duas medidas anteriores. Os ângulos de azimute e elevação do alvo, em cada amostragem, foram obtidos a partir da projeção destes vetores velocidades. Assim, as velocidade angular  $\omega_\chi$  pôde ser obtida a partir da diferença entre o ângulo de azimute atual e o anterior, divididos pelo tempo. Foi aplicado o mesmo procedimento para obtenção de  $\omega_\gamma$ , a partir do ângulo de elevação. Outra proposta desenvolvida envolve o modelo de observações, no qual incluímos duas informações deduzidas, as velocidades angulares do ângulo de azimute e de elevação na matriz  $H_{k+1}$  da equação de medição, que relaciona o estado à medida.

A abordagem proposta foi validada pelos resultados dos testes apresentados, e pode-se apontar como principal contribuição deste trabalho o desenvolvimento de uma nova abordagem para cálculo do modelo CT, através das coordenadas cartesianas de forma tridimensional.

## REFERÊNCIAS

- [1] FRENCL, V. B.; VAL, J. B. do. Tracking with range rate measurements: Turn rate estimation and particle filtering. In: IEEE. *Radar Conference (RADAR), 2012 IEEE*. [S.l.], 2012. p. 0287-0292.
- [2] YUAN, X.; LIAN, F.; HAN, C. Models and algorithms for tracking target with coordinated turn motion. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2014, 2014.
- [3] FRENCL, V. B.; VAL, J. B. do. A trajectory simulator for individual movements using probabilistic distribution profiles. In: IEEE. *Radar Conference (RadarConf), 2016 IEEE*. [S.l.], 2016. p. 1-6.
- [4] BAR-SHALOM, Y.; LI, X. R.; KIRUBARAJAN, T. *Estimation with applications to tracking and navigation: theory algorithms and software*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2001.
- [5] KORBICZ, J. et al. *Fault diagnosis. Models, artificial intelligence, applications*. [S.l.]: Springer Berlin/Heidelberg, 2004.
- [6] BAR-SHALOM, Y. et al. *Mathematics in science and engineering*. [S.l.]: Academic press, 1988.
- [7] AGUIRRE, L. *Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. [S.l.]: Editora UFMG, 2007. ISBN 9788570415844.
- [8] WELCH, G.; BISHOP, G. Course 8—an introduction to the kalman filter. *SIGGRAPH 2001 Courses*, 2001.
- [9] KANG, E. *Radar System Analysis, Design, and Simulation*. [S.l.]: Artech House, 2008. (The Artech House radar library). ISBN 9781596933477.
- [10] FRENCL, V. B. *Técnicas de filtragem utilizando processos com saltos markovianos aplicados ao rastreamento de alvos móveis*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, 2010.
- [11] FRENCL, V. B.; VAL, J. B. R. do. Rastreamento utilizando filtro de partículas com perturbação gaussiana na estimativa e medidas de velocidade radial. 2012.