

RANSAC e otimização não linear aplicados à localização passiva de emissores

Luciano Silva do Lago¹, Mauri Aparecido de Oliveira¹

¹Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos/SP - Brasil

Resumo—Este trabalho propõe uma arquitetura computacional voltada para a localização passiva de emissores de radiofrequência no contexto da Guerra Eletrônica. Embora a literatura aborde a estimação de posição de forma recorrente, frequentemente negligencia a mitigação de erros sistemáticos e a presença de *outliers* (ou valores atípicos em português) nas medições operacionais. Para preencher essa lacuna, a estratégia desenvolvida integra a filtragem espacial de linhas de visada por meio do algoritmo MultiRANSAC — atuando na remoção de *outliers* e na segregação espacial de emissores — à estimação de posição de Poirót, otimizada pelo método de Levenberg-Marquardt. Embora a modelagem de deriva temporal (*drift*) tenha sido equacionada matematicamente, a validação empírica revelou instabilidade numérica sob intervalos temporais estendidos, restringindo a solução ótima ao modelo de viés simétrico de asa. Os resultados obtidos em 1.000 iterações estocásticas apontam a redução dos erros de distância oblíqua (*slant range* - SR), que inicialmente superavam dezenas de quilômetros, para margens subquilométricas. Tais níveis de precisão conferem aplicabilidade operacional à solução, tornando-a adequada para subsidiar o mapeamento da Ordem de Batalha Eletrônica e ações de autoproteção.

Palavras-Chave—Guerra Eletrônica, Localização Passiva, Otimização Não-Linear, *Outliers* (valores atípicos), *Inliers* (valores conformes).

I. INTRODUÇÃO

As missões de *Electronic Intelligence* (ELINT, ou inteligência eletrônica em português) interceptam sinais eletromagnéticos não associados a comunicações para identificar parâmetros e características de emissores adversários, viabilizando o desenvolvimento de contramedidas. Consequentemente, as plataformas ELINT coletam grandes volumes de dados ao longo de extensos períodos de operação [1].

Ademais, um dos objetivos dessas missões é a localização de emissores, realizada pelos sistemas de *Electronic Support* (ES, ou medidas de apoio de guerra eletrônica em português). Em uma plataforma ES operando de forma isolada, a determinação da posição do emissor depende de medições de *Direction of Arrival* (DOA, ou direção de chegada em português), as quais são combinadas ao longo do tempo para gerar a estimativa de localização [2].

As medições de DOA, quando associadas à posição da aeronave, definem as *Lines of Bearing* (LOBs, ou linha de visada em português). Essas LOBs consistem em semirretas com origem na posição do sensor no instante de interceptação do sinal, com orientação dada pelo ângulo DOA medido em relação ao norte verdadeiro. O conjunto dessas linhas constitui o dado de entrada para algoritmos de localização *bearing-only* (baseado exclusivamente em azimuth).

Os métodos tradicionais de estimação apresentam desempenho adequado quando as observações correspondem a modelagem estatística convencional. Em cenários operacionais, no entanto, algumas medições demonstram-se pouco confiáveis, sendo classificadas como *outliers* (ou valores atípicos em português) [3]. A ocorrência dessas medições espúrias decorre de diferentes fontes, a exemplo da recepção de sinais com parâmetros muito similares, como um mesmo radar que apresente desvio mínimo de frequência, ou estritamente idênticos, como dois radares do mesmo modelo que operem em regiões distintas. A Figura 1 ilustra o primeiro caso.

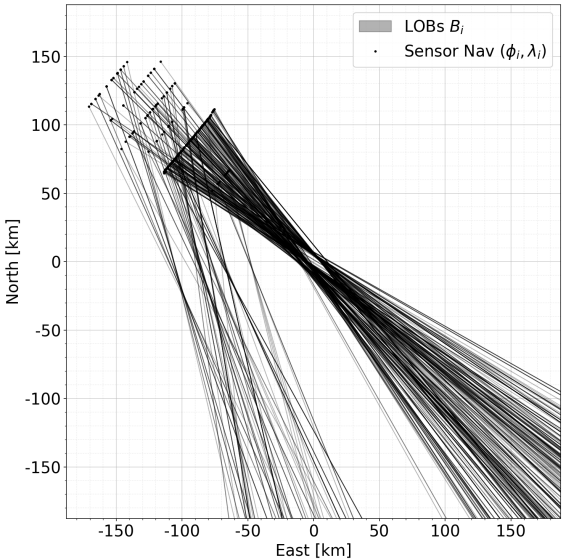


Fig. 1. Representação gráfica de LOBs contaminadas por *outliers*.

Além das anomalias isoladas, ocorrem erros sistemáticos nas medições. Em metrologia, a correção de um erro sistemático envolve a aplicação de um valor compensatório. Esse valor, ao ser adicionado ou subtraído da média observada, restabelece a faixa de probabilidade na qual se espera encontrar o valor verdadeiro da grandeza medida [4].

A estimação da origem de emissores eletromagnéticos tem sido objeto de estudo ao longo das últimas décadas. Inicialmente, Stansfield [5] propôs um método de estimação utilizando *Weighted Least Squares* (WLS, ou mínimos quadrados ponderados em português), cujo desempenho e vieses analíticos foram posteriormente detalhados por Gavish e Weiss [6]. Em seguida, Poirót e McWilliams [7] apresentaram uma solução para a não linearidade do problema de localização e vieses de medição por meio da expansão em séries de Taylor. Com base nesse arcabouço, Foy [8] formalizou a estimação generalizada iterativa por séries de Taylor para fusão de dados. Estendendo esses princípios ite-

rativos a cenários dinâmicos, Poirot e Smith [9] introduziram um algoritmo baseado na análise de resíduos para classificar alvos como estacionários ou em movimento. A utilização do *Extended Kalman Filter* (EKF, ou filtro de Kalman estendido em português) foi proposta por Spingarn [10]. Deerga Rao e Reddy [11] desenvolveram uma abordagem iterativa combinando *Total Least Squares* (TLS, ou mínimos quadrados totais em português) com um Filtro de Kalman tradicional.

Apesar do rigor matemático das formulações clássicas [5], [7], [10], [11], o desempenho de estimadores fundamentados em modelos estatísticos ideais degrada em cenários operacionais densos devido à contaminação por valores atípicos e múltiplos ruídos. Para mitigar a contaminação amostral, o algoritmo *Random Sample Consensus* (RANSAC) [12] e suas variantes consolidaram-se como estimadores estatísticos eficazes, cuja fundamentação teórica é amplamente revisada por Raguram *et al.* [13]. No domínio específico de geolocalização, Luo e McClellan [14] aplicaram um esquema RANSAC adaptativo para remoção de *outliers*, contudo restrito ao campo próximo. Contudo, a literatura técnica ainda não apresenta métodos que combinem a eliminação de medições espúrias, a separação simultânea de múltiplos emissores e a correção analítica de vies sistemático em cenários operacionais de longo alcance.

Para tratar esse problema, este trabalho propõe uma arquitetura de processamento para estimação de posição. O objetivo é integrar o algoritmo MultiRANSAC [15] — aplicado à filtragem de medições espúrias e à separação espacial em cenários multi-emissores — ao estimador de posição de Poirot e McWilliams [7], que realiza correção estrutural de vies, otimizado pelo método não linear de Levenberg-Marquardt [16]. A validação do método é conduzida utilizando dados operacionais brutos coletados em campanhas de voo de missões reais de ELINT, em contraste com o uso de simulações.

O artigo encontra-se organizado na seguinte estrutura: a Seção 2 apresenta o referencial teórico, contemplando os conceitos de localização de emissores, linearização por séries de Taylor proposta por Poirot, otimização não-linear de Levenberg-Marquardt e MultiRANSAC. A Seção 3 detalha a metodologia de integração algorítmica e define o processamento analítico para observações sujeitas a vieses sistemáticos. A Seção 4 discute os resultados obtidos com os dados operacionais em voo ao longo de 1.000 iterações Monte Carlo. Por fim, a Seção 5 sumariza as conclusões extraídas.

II. REFERENCIAL TEÓRICO

A. Estimador de Poirot

A direção teórica (azimute) B_i do i -ésimo sensor, localizado na latitude ϕ_i e longitude λ_i , para um alvo posicionado nas coordenadas geodésicas desconhecidas (ϕ_e, λ_e) é definida pela trigonometria esférica como:

$$\begin{aligned} B_i &= \tilde{B}_i - \Delta B_i \\ &= \cos^{-1} \frac{\phi_{e0} - \tilde{\phi}_i - \Delta\phi_e + \Delta\phi_i}{\left((\phi_{e0} - \tilde{\phi}_i - \Delta\phi_e + \Delta\phi_i)^2 + \left[(\lambda_{e0} - \tilde{\lambda}_i - \Delta\lambda_e + \Delta\lambda_i)^2 \cdot \cos^2(\tilde{\phi}_i - \Delta\phi_i) \right] \right)^{1/2}} \\ &= F_i(\phi_{e0}, \lambda_{e0}, \tilde{\phi}_i, \tilde{\lambda}_i, \Delta\phi_e, \Delta\lambda_e, \Delta\phi_i, \Delta\lambda_i), \end{aligned} \quad (1)$$

onde,

ϕ_{e0} e λ_{e0} são as estimativas iniciais da posição do emissor;
 $\tilde{\phi}_i$ e $\tilde{\lambda}_i$ são as posições do sensor na i -ésima observação para latitude e longitude, respectivamente;
 $\Delta\phi_e$ e $\Delta\lambda_e$ são os erros de posição do emissor para latitude e longitude, respectivamente; e
 $\Delta\phi_i$ e $\Delta\lambda_i$ são os erros de posição do sensor para latitude e longitude, respectivamente.

A fim de contornar a natureza não linear do problema de localização passiva, Poirot e McWilliams [7] propuseram a sua linearização por meio da expansão em Séries de Taylor.

$$Y_i = X_{1i}\beta_1 + X_{2i}\beta_2 + e_i, \quad (2)$$

onde:

$$\begin{aligned} Y_i &= \tilde{B}_i - F_i|_{\Delta_i=0} \\ X_{1i} &= \frac{\partial F_i}{\partial \Delta\phi_e}|_{\Delta_i=0}; \\ X_{2i} &= \frac{\partial F_i}{\partial \Delta\lambda_e}|_{\Delta_i=0}; \\ \beta_1 &= \Delta\phi_e; \\ \beta_2 &= \Delta\lambda_e; e \\ e_i &= \Delta B_i + \frac{\partial F_i}{\partial \Delta\lambda_i}|_{\Delta_i=0}\Delta\lambda_i + \frac{\partial F_i}{\partial \Delta\phi_i}|_{\Delta_i=0}\Delta\phi_i. \end{aligned}$$

A execução do algoritmo requer uma estimativa inicial de posição, denotada por ϕ_{e0} e λ_{e0} .

Para um conjunto de N observações, o Modelo I, que considera o sistema livre de erros sistemáticos, ou seja, $\Delta B_i = 0$, (2) pode ser representado na forma matricial como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}}_{N \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\phi_e} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\lambda_e} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\phi_e} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\lambda_e} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial \Delta\phi_e} & \frac{\partial F_N}{\partial \Delta\lambda_e} \end{bmatrix}}_{N \times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}}_{2 \times 1}. \quad (3)$$

Como forma de incorporar a absorção de erros sistemáticos inerentes aos sensores, Poirot expandiu o modelo estatístico original. A inclusão do parâmetro β_3 estabelece o Modelo II, concebido com a finalidade de compensar vieses angulares constantes, a exemplo do desalinhamento físico da antena em relação ao eixo longitudinal da aeronave. A equação linearizada incorpora essa nova componente, resultando em:

$$Y_i = X_{1i}\beta_1 + X_{2i}\beta_2 + X_{3i}\beta_3 + e_i. \quad (4)$$

Nessa formulação, o termo X_{3i} atua como uma variável indicadora que mapeia o contexto geométrico da medição, identificando, por exemplo, qual asa da aeronave captou o sinal. A representação matricial de (4) é dada por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}}_{N \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\phi_e} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta\lambda_e} & 1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\phi_e} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta\lambda_e} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial \Delta\phi_e} & \frac{\partial F_N}{\partial \Delta\lambda_e} & 1 \end{bmatrix}}_{N \times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}_{3 \times 1}. \quad (5)$$

Caso o erro sistemático manifeste dependência temporal, recorre-se ao Modelo III. Essa formulação introduz o parâmetro β_4 , destinado a compensar degradações progressivas, como a deriva de calibração inerente aos sistemas de navegação inercial. A equação expandida assume a seguinte forma:

$$Y_i = X_{1i}\beta_1 + X_{2i}\beta_2 + X_{3i}\beta_3 + X_{4i}\beta_4 + e_i. \quad (6)$$

Nesse caso, a variável X_{4i} corresponde ao instante de tempo t_i no qual ocorreu a observação. A estrutura matricial correspondente define-se como:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \Delta \phi_e} & \frac{\partial F_1}{\partial \Delta \lambda_e} & 1 & t_1 \\ \frac{\partial F_2}{\partial \Delta \phi_e} & \frac{\partial F_2}{\partial \Delta \lambda_e} & 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial \Delta \phi_e} & \frac{\partial F_N}{\partial \Delta \lambda_e} & 1 & t_N \end{bmatrix}_{N \times 4} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (7)$$

O modelo matemático mais adequado não corresponde necessariamente àquele com o maior número de parâmetros. A inclusão de β_3 ou β_4 em um conjunto de dados desprovido de tais vícios insere graus de liberdade desnecessários, o que compromete a precisão final das coordenadas estimadas. Dessa forma, aplica-se a formulação de testes de hipóteses estatísticas para verificar a significância das variáveis paramétricas. A seleção do modelo definitivo condiciona-se à avaliação prévia da nulidade estatística de β_3 e β_4 .

B. Algoritmo de Otimização Numérica

Em aplicações modernas, as instabilidades numéricas oriundas da inversão do produto matricial $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ são mitigadas pelo uso do algoritmo iterativo de Levenberg-Marquardt [17], [18]. O presente trabalho baseia-se na implementação concebida por Moré [16], a qual ajusta dinamicamente o fator escalar de amortecimento λ no decurso das iterações numéricas.

O vetor de incremento $\mathbf{p}$ é calculado resolvendo-se o sistema

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \mathbf{D}^T \mathbf{D}) \mathbf{p} = -\mathbf{J}^T \mathbf{f}. \quad (8)$$

Nessa equação referencial, $\mathbf{f}$ representa o vetor coluna formado pelos resíduos angulares inerentes às N observações de entrada, $\lambda \geq 0$ assume o papel lógico de fator algorítmico numérico de amortecimento espacial associado, e $\mathbf{J}$ corresponde à matriz Jacobiana preenchida com as derivadas parciais em relação aos constituintes analíticos dos resíduos.

A abordagem concebida por Moré propõe a substituição da matriz identidade da formulação clássica por uma matriz diagonal de escalonamento dinâmico estipulada como $\mathbf{D}$. Esse procedimento compensatório equaliza numericamente as ordens de grandeza díspares envolvidas entre as variáveis atinentes e assegura um patamar adequado de estabilidade técnica ao processamento numérico.

C. O Algoritmo MultiRANSAC

O algoritmo MultiRANSAC, capaz de extrair W modelos paramétricos em uma única iteração, foi desenvolvido por Zuliani *et al.* [15]. Nessa formulação, o limiar de consenso estatístico atua de modo concorrente, na medida em que cada observação é fixada exclusivamente ao modelo que minimize o respectivo resíduo matemático. Essa arquitetura metodológica impede a sobreposição de *inliers* e assegura o isolamento analítico das linhas de visada, mitigando as interferências originadas por radares posicionados em vizinhanças adjacentes. A lógica computacional empregada pelo método acha-se detalhada no Algoritmo 2.

Seja o termo $\mathcal{M}_w(\boldsymbol{\theta}_w)$ a representação do modelo matemático definido pelo vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}_w$. Qualquer dado sem erro pertence perfeitamente a $\mathcal{M}_w$. O termo x' denota um ponto idealizado que reside em $\mathcal{M}_w$. A distância mínima entre a medição real, possivelmente ruidosa x , e o ponto ideal x' resulta no erro de ajuste:

$$e(x; \mathcal{M}_w(\boldsymbol{\theta}_w)) = \min_{x' \in \mathcal{M}_w(\boldsymbol{\theta}_w)} d(x, x'), \quad (9)$$

onde $d(\cdot, \cdot)$ é uma função de distância apropriada. Utilizando esta métrica de erro, definimos o *consensus set* (CS, ou conjunto de consenso em português) $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta}_w)$ como o subconjunto de pontos em $\mathcal{D}$ tais que sua distância até a variedade $\mathcal{M}_w(\boldsymbol{\theta}_w)$ é menor ou igual a um limiar τ .

Considerando o escopo simultâneo, o limiar global de iteração pode ser fixado como:

$$T^{iter} = \frac{\log \epsilon}{\log(1 - q(\boldsymbol{\theta}))}, \quad (10)$$

onde ϵ é a probabilidade de falha tolerada (equivalente a $1 - p$) e $q(\boldsymbol{\theta})$ é a probabilidade conjunta de extrair amostras puras para todos os modelos simultaneamente.

Em algumas situações, os conjuntos de consenso de uma iteração podem ser unidos com conjuntos de iterações anteriores para maximizar os dados conformes (*inliers*). Isso ocorre desde que não existam LOBs compartilhadas. Esse processo de fusão mútua é resolvido por um procedimento heurístico de busca sequencial gulosa baseado no critério de máxima cardinalidade (*greedy approach*), definida no Algoritmo 1:

Algoritmo 1: UPDATE_CS($\mathcal{S}^{(h-1)}$, $\mathcal{S}^{(h)}$)

```

1  $\mathcal{S}_{all} \leftarrow \{\mathcal{S}_1^{(h-1)}, \dots, \mathcal{S}_W^{(h-1)}\} \cup \{\mathcal{S}_1^{(h)}, \dots, \mathcal{S}_W^{(h)}\};$ 
2  $\mathcal{S}^{(h)}(\boldsymbol{\theta}) \leftarrow \emptyset;$ 
3 while  $w \leq W$  do
4    $\mathcal{S}^* \leftarrow \text{GET\_MAX\_CARDINALITY}(\mathcal{S}_{all});$ 
5   if  $\mathcal{S}^*$  é disjunto de qualquer conjunto em  $\mathcal{S}^{(h)}(\boldsymbol{\theta})$ 
6     then
7        $\mathcal{S}^{(h)}(\boldsymbol{\theta}) \leftarrow \mathcal{S}^{(h)}(\boldsymbol{\theta}) \cup \mathcal{S}^*;$ 
8     end
9      $\mathcal{S}_{all} \leftarrow \mathcal{S}_{all} \setminus \mathcal{S}^*;$ 
10     $w \leftarrow w + 1;$ 
11 end
12 return  $\mathcal{S}^{(h)}(\boldsymbol{\theta});$ 
```

Dentro do Algoritmo 1 (UPDATE_CS), a rotina GET_MAX_CARDINALITY retorna o conjunto com o maior número de elementos [19].

Por fim, a arquitetura geral de execução do MultiRANSAC consolida essas rotinas conforme o Algoritmo 2:

Neste laço iterativo, GET_MSS extrai as amostras aleatórias mínimas e GET_CS calcula o vetor de parâmetros correspondente junto à designação mútua de *inliers*. O limite de iterações T^{iter} é recalculado dinamicamente sempre que um consenso superior é descoberto.

III. METODOLOGIA

O método proposto integra a fundamentação estatística de Poirot [7], o algoritmo de otimização de Levenberg-Marquardt [16] e o MultiRANSAC [15]. Esse fluxo unifica a localização dos emissores e a rejeição de dados espúrios.

Algoritmo 2: MULTI-RANSAC($\mathcal{D}, W, \epsilon$)

```

1  $h \leftarrow 0, T^{iter} \leftarrow \infty;$ 
2 while  $h \leq T^{iter}$  do
3    $h \leftarrow h + 1;$ 
4   for  $w \leftarrow 1$  to  $W$  do
5      $(s_w, \theta_w) \leftarrow \text{GET\_MSS}(\mathcal{D}, W);$ 
6      $(\mathcal{S}_w, \theta_w) \leftarrow \text{GET\_CS}(\mathcal{D}, s_w);$ 
7      $\mathcal{D} \leftarrow \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}_w;$ 
8   end
9    $\mathcal{S}^{(h)} \leftarrow \{\mathcal{S}_1^{(h)}, \dots, \mathcal{S}_W^{(h)}\};$ 
10   $\mathcal{S} \leftarrow \text{UPDATE\_CS}(\mathcal{S}^{(h-1)}, \mathcal{S}^{(h)});$ 
11   $T^{iter} \leftarrow \frac{\log \epsilon}{\log(1-q(\theta))};$ 
12 end
13 return  $\mathcal{S};$ 

```

A. Ambiente e Implementação Computacional

Os algoritmos de localização, filtragem e testes estatísticos descritos nas seções anteriores foram implementados na linguagem de programação Python (versão 3.12.3). O ambiente de desenvolvimento foi isolado por meio de gerenciadores de pacotes virtuais, garantindo o controle das dependências e a reprodutibilidade dos experimentos.

A manipulação de estruturas de dados multidimensionais e as operações de álgebra linear foram conduzidas por meio das bibliotecas Pandas [20], [21] e NumPy [22]. Para a resolução dos problemas de otimização não-linear, especificamente o algoritmo de Levenberg-Marquardt, utilizou-se o pacote SciPy [23]. As transformações geodésicas sobre o elipsoide WGS84 foram calculadas com o auxílio da biblioteca PyMap3D [24].

Os ensaios e validações computacionais foram executados localmente em uma estação de trabalho com sistema operacional Linux, equipada com processador Intel Core i7-9850H operando a 2,60 GHz e 32 GB de memória RAM.

B. Adaptação Computacional do Modelo Teórico

Dentro do algoritmo de Poirot, o método de Stansfield [5] fornece a estimativa inicial de latitude e longitude que alimenta o otimizador não-linear (Modelo I, II e III). A formulação descrita na Seção 2 baseia-se em aproximações trigonométricas e expansão em Séries de Taylor, já a implementação desenvolvida substitui parte dessa estrutura analítica por métodos numéricos exatos.

A função teórica de azimute F_i é calculada por meio de transformações geodésicas sobre o elipsoide WGS84. O uso desse elipsoide evita os erros de truncamento típicos da trigonometria esférica simplificada.

A matriz Jacobiana $\mathbf{J}$, exigida pela Equação (8), é estimada numericamente pelo método de diferenças finitas a cada iteração. Esse cálculo atua sobre os resíduos geodésicos, linearizando o problema de forma local. Evita-se, assim, a necessidade de derivadas parciais analíticas completas, mantendo a capacidade do modelo de Poirot de estimar vieses.

Após a convergência do algoritmo de Levenberg-Marquardt sobre os *inliers* do MultiRANSAC, a análise dos resíduos verifica a presença de erros sistemáticos. Testes de hipóteses sequenciais [25], fundamentados no Teste t de Student, definem a transição entre os modelos matemáticos.

A identificação de vieses expande o vetor de estado $\mathbf{x}$ e as colunas da matriz Jacobiana $\mathbf{J}$:

- **Modelo I:** Assume que o ruído das medições é branco e gaussiano. O vetor de estado contém apenas as coordenadas geográficas da fonte emissora, $\mathbf{x} = [\phi_e, \lambda_e]^T$. A matriz Jacobiana abriga as derivadas parciais numéricas em relação à latitude e à longitude.
- **Modelo II:** Ativado quando o teste *t-Student* detecta diferença significativa ($p < 0,05$) nas médias de erro entre os lados direito e esquerdo da aeronave. O vetor de estado recebe o termo β_3 , que quantifica o viés angular de asa, resultando em $\mathbf{x} = [\phi_e, \lambda_e, \beta_3]^T$. A matriz Jacobiana incorpora uma coluna indicadora baseada no ângulo de chegada (*Angle of Arrival* - AOA, ou ângulo de chegada em português):

$$X_{3i} = \begin{cases} +1, & \text{se } \text{AOA} \geq 0; \\ -1, & \text{se } \text{AOA} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

- **Modelo III:** Acionado caso o Modelo II seja rejeitado, mas o teste *t-Student* indique dependência temporal nos resíduos ($p < 0,05$), característica associada à degradação da navegação inercial ao longo do voo. O vetor de estado torna-se $\mathbf{x} = [\phi_e, \lambda_e, \beta_3, \beta_4]^T$, em que β_4 representa a taxa de deriva temporal (*drift*). O tempo de cada medição, t_i , passa a compor a otimização, e a Jacobiana é expandida com as variações temporais relativas às marcações.

A união dos algoritmos inicia-se na fase de extração de modelos (GET_MSS). A cada iteração do MultiRANSAC, o sistema seleciona uma amostra mínima de $s = 3$ LOBs e calcula um ponto central, (ϕ_R, λ_R) , usando o método de Poirot. A função GET_CS calcula a diferença entre o DOA estimado da posição (ϕ_i, λ_i) até a posição (ϕ_R, λ_R) , B_R , e todos os DOAs medidos $\hat{B}_i$. O valor absoluto desta diferença é comparado a um limiar $\tau = 5^\circ$. Se a diferença for menor que o limiar, a LOB é adicionada ao conjunto de consenso (*consensus set* $\mathcal{S}$).

A rotina GET_MAX_CARDINALITY assegura que o conjunto com o maior número de LOBs receba prioridade de inserção, evitando a sobreposição de dados.

Para cada CS que o MultiRANSAC retornar, uma nova estimativa (ϕ_e, λ_e) é calculada pelo método de Poirot, utilizando o método de otimização Levenberg-Marquardt.

IV. RESULTADOS E DISCUSSÃO

A avaliação da arquitetura computacional proposta utilizou dados operacionais reais de interceptação eletromagnética coletados em campanhas de voo. Os testes processaram missões sujeitas a ruído severo e cenários complexos com múltiplos radares operando simultaneamente em faixas espectrais sobrepostas.

Nesse contexto operacional, as trajetórias mantiveram distância média aos alvos radar de aproximadamente 100 km, com abertura angular acumulada mínima de 12° , dividindo-se em dois cenários: o Cenário Centro-Oeste (IDs 1 a 6), focado em alvo único com emissores vizinhos de parâmetros similares ($W = 1$); e o Cenário Sul (IDs 7 a 10), caracterizado por dois alvos com frequências sobrepostas não separáveis unicamente por características eletromagnéticas

($W = 2$), cuja contaminação mútua inviabilizava a estimação sem separação espacial prévia (Figura 2).

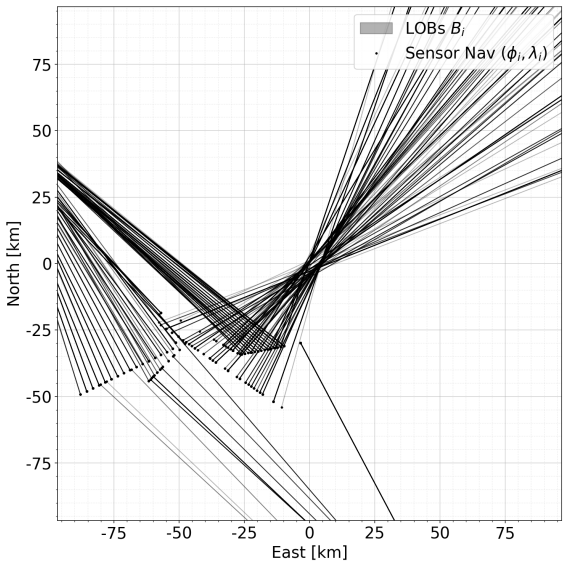


Fig. 2. Representação gráfica de LOBs na região sul do país com múltiplos emissores.

Para mensurar com rigor o desempenho locacional e quantificar a incerteza estatística decorrente da natureza estocástica do algoritmo, o fluxo completo de processamento foi executado 1.000 vezes para cada missão, variando-se a semente do gerador de números pseudoaleatórios. Fixaram-se como parâmetros de reprodutibilidade o limiar de tolerância angular $\tau = 5^\circ$ e o subconjunto amostral mínimo de $s = 3$ LOBs.

A. Seleção de Modelos e Viés Sistemático

Aprofundando a análise da otimização, os testes de hipóteses estatísticos ($\alpha = 0,05$) permitiram a transição autônoma e fundamentada do motor de inferência entre os modelos matemáticos. A Tabela I consolida a seleção do modelo e a faixa de convergência do viés de asa estimada ao término das 1.000 iterações.

TABELA I
MODELOS ESTATÍSTICOS E FAIXAS DE VIÉS DE ASA (β_3) NAS 1.000 ITERAÇÕES.

ID	Modelo Selecionado	β_3 (°)
1	Modelo II (Viés Simétrico de Asa)	-1,89 a -1,74
2		-2,29 a -2,10
3		-2,19 a -2,08
4		-1,91 a -1,76
5		-2,18 a -2,09
6		-1,78 a -1,70
7		-1,05 a 0,53
8		-2,23 a -2,20
9		-0,54
10		-1,51 a -1,50

Conforme observado, o Modelo II, adaptado para contemplar o viés simétrico de asa, revelou-se a matriz explicativa definitiva em todas as campanhas em voo. Esse comportamento empírico comprova que as medições angulares capturadas nas órbitas de patrulha sofrem perturbações sistêmicas puramente atreladas à instalação lateral das antenas receptoras. Embora o Modelo III (deriva temporal) tenha sido equacionado, sua ativação mostrou instabilidade em trechos de trajetória com

longos intervalos entre pulsos, validando a estabilidade do Modelo II como o estimador ótimo.

B. Redução de Distância Oblíqua (Slant Range)

A precisão locacional foi avaliada por meio de *slant range* (SR, ou distância oblíqua em português), que representa o erro euclidiano tridimensional direto em quilômetros entre a coordenada estimada pelo algoritmo e a posição real do alvo radar homologada em solo. A métrica de avaliação adotada nas 1.000 iterações foi *Root Mean Square Error* (RMSE, ou raiz do erro quadrático médio em português). Como base de comparação foi utilizado o algoritmo de Stansfield [5] com pesos unitários, chamado somente de *Least Squares* (LS, ou mínimos quadrados em português). A Tabela II detalha os valores comparativos obtidos.

TABELA II
COMPARATIVO DE SR (EM KM).

ID	SR (km)		RMSE da SR (km)	
	LS sem RANSAC	Poirot sem RANSAC	LS com RANSAC	Poirot com RANSAC
1	119,32	27,89	9,07	0,88
2	174,69	129,57	42,18	4,10
3	120,98	27,51	29,40	7,44
4	159,78	27,46	21,06	4,26
5	89,17	44,42	34,90	2,25
6	126,45	257,04	20,37	1,64
7	-	-	11,44	2,23
8	-	-	2,05	1,65
9	-	-	11,36	1,40
10	-	-	3,61	2,49

Sem a higienização primária por consenso espacial, os erros de SR superavam rotineiramente 100 km, e nos cenários de alvos sobrepostos (IDs 7 a 10), a ausência de segregação tornava a estimação inviável. Após a segregação das LOBs pelo MultiRANSAC, a otimização iterativa não linear de Levenberg-Marquardt com o Modelo II de Poirot alcançou refinamento em relação ao estimador linear clássico LS, conforme sintetizado na Figura 3. Como destaque, na missão 1 o erro quadrático médio residual foi reduzido para 0,88 km.

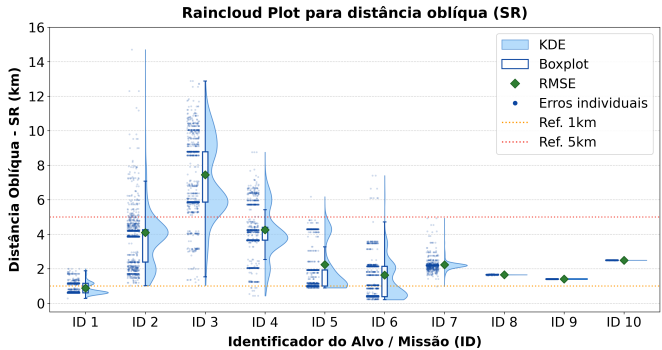


Fig. 3. Média e incerteza do erro de distância oblíqua após Poirot + MultiRANSAC (1.000 iterações).

A Figura 3 evidencia a sensibilidade do método frente a diferentes geometrias de engajamento nas 1.000 iterações. Algumas missões apresentaram dispersão amostral considerável, enquanto outras, a exemplo dos IDs 7 a 10, exibiram dispersão quase nula. O fator determinante dessa disparidade não constituiu o escopo deste trabalho, contudo o perfil de voo da aeronave coletora figura como hipótese preponderante.

C. Implicações Operacionais dos Requisitos de Localização

Para contextualizar o impacto tático dos resultados obtidos, recorre-se a Adamy [1], que categoriza os níveis de exatidão requeridos na localização de emissores passivos de acordo com a finalidade militar almejada. A Tabela III resume essas diretrizes operacionais de emprego.

TABELA III
IMPLICAÇÕES DOS OBJETIVOS DE LOCALIZAÇÃO DE EMISSORES
(ADAPTADO DE [1]).

Objetivo	Valor Estratégico	Acurácia Necessária
Ordem de Batalha Eletrônica	Localizações de tipos de emissores associados a armas e unidades específicas mostram a força, desdobramento e missão do inimigo	Média ≈ 1 km
Localização de sensor de armas (autoproteção)	Permite concentrar potência de interferência ou manobras para evasão de ameaças	Baixa ≈ 5 km
Localização de sensor de armas (autoproteção)	Permite evasão de ameaças por outros combatentes aliados	Média ≈ 1 km
Localização de ativos inimigos	Permite afunilar a busca de reconhecimento ou repassar para dispositivos de busca de alvos	Média ≈ 5 km
Localização de alvo de precisão	Permite ataque direto por bombas não guiadas ou artilharia	Alta ≈ 100 m
Diferenciação de emissores	Permite triagem por localização para separação de ameaças no processamento de identificação	Baixa ≈ 5 km

Confrontando os resultados da arquitetura com esses referenciais, constata-se que o encadeamento MultiRANSAC e Poirot com Levenberg-Marquardt atingiu níveis de precisão plenamente compatíveis com as missões de mapeamento de Ordem de Batalha Eletrônica (EOB, ou ordem de batalha eletrônica em português, com acurácia ≈ 1 km), autoproteção de aeronaves e evasão de ameaças (≈ 1 a 5 km) e triagem de alvos emissores (≈ 5 km). Apenas o requisito extremo de ataque cinético direto de precisão (≈ 100 m) não foi atingido, o que é condizente com a geometria de coleta operando em distâncias de afastamento superiores a 100 km.

V. CONCLUSÕES

O presente trabalho desenvolveu e validou uma arquitetura computacional para a localização passiva de emissores de radiofrequência em missões de Guerra Eletrônica. O fluxo integral do algoritmo MultiRANSAC — para rejeição geométrica de dados espúrios e segregação concorrente de fontes sobrepostas — ao estimador de Poirot com correção estrutural de viés, resolvido numericamente pelo algoritmo de Levenberg-Marquardt.

A avaliação estatística baseada em 1.000 repetições de Monte Carlo sobre dados brutos de campanhas reais de voo comprovou a consistência do método. O modelo estatístico com viés simétrico de asa (Modelo II) demonstrou ser a matriz explicativa definitiva das imperfeições mecânicas de instalação dos sensores, eliminando os desvios sistemáticos angulares. Os erros residuais de distância oblíqua foram reduzidos de patamares inviáveis (superiores a 100 km) para ordens subquilométricas e métricas de poucos quilômetros, provendo exatidão compatível com missões operacionais de inteligência e autoproteção de meios aéreos.

Para trabalhos futuros, recomenda-se a extensão dessa formulação estática para arquiteturas de filtragem sequencial contínua em tempo real, acoplando os resíduos angulares

obtidos a técnicas estocásticas como o Filtro de Kalman Estendido ou Filtro de Informação de Raiz Quadrada.

REFERÊNCIAS

[1] D. L. Adamy, *EW 101: a first course in electronic warfare*, ser. Artech house radar library. Boston: Artech House, 2001.

[2] S. Robertson, *Practical ESM analysis*, ser. Artech House electronic warfare library. Boston London: Artech House, 2019.

[3] I. Enosh A. J. Weiss, “Outlier identification for TOA-based source localization in the presence of noise,” *Signal Processing*, vol. 102, pp. 85–95, Sep. 2014.

[4] R. B. F. Schumacher, “Systematic Measurement Errors,” *Journal of Quality Technology*, vol. 13, no. 1, pp. 10–24, Jan. 1981.

[5] R. Stansfield, “Statistical theory of d.f. fixing,” *Journal of the Institution of Electrical Engineers - Part IIIA: Radiocommunication*, vol. 94, no. 15, pp. 762–770, Mar. 1947.

[6] M. Gavish A. Weiss, “Performance analysis of bearing-only target location algorithms,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 3, pp. 817–828, 1992.

[7] J. Poirot G. McWilliams, “Application of Linear Statistical Models to Radar Location Techniques,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-10, no. 6, pp. 830–834, Nov. 1974.

[8] W. H. FOY, “Position-location solutions by taylor-series estimation,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-12, no. 2, pp. 187–194, 1976.

[9] J. Poirot M. Smith, “Moving Emitter Classification,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-12, no. 2, pp. 255–269, Mar. 1976.

[10] K. Spingarn, “Passive position location estimation using the extended kalman filter,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-23, no. 4, pp. 558–567, 1987.

[11] K. Deergha Rao D. Reddy, “A new method for finding electromagnetic emitter location,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 30, no. 4, pp. 1081–1085, Oct. 1994.

[12] M. A. Fischler R. C. Bolles, “Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography,” *Communications of the ACM*, vol. 24, no. 6, pp. 381–395, Jun. 1981.

[13] R. Raguram, O. Chum, M. Pollefeys, J. Matas, J.-M. Frahm, “USAC: A Universal Framework for Random Sample Consensus,” *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 35, no. 8, pp. 2022–2038, Aug. 2013.

[14] C. Luo J. H. McClellan, “Robust geolocation estimation using adaptive ransac algorithm,” in *2010 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 2010, pp. 3862–3865.

[15] M. Zuliani, C. Kenney, B. Manjunath, “The multiransac algorithm and its application to detect planar homographies,” in *IEEE International Conference on Image Processing 2005*, vol. 3, 2005, pp. III–153.

[16] J. J. Moré, “The Levenberg-Marquardt algorithm: Implementation and theory,” in *Lecture Notes in Mathematics*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1978, pp. 105–116.

[17] K. Levenberg, “A method for the solution of certain non-linear problems in least squares,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 2, no. 2, pp. 164–168, 1944.

[18] D. W. Marquardt, “An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters,” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, no. 2, pp. 431–441, 1963.

[19] M. Zuliani, “Ransac for dummies,” *Vision Research Lab, University of California, Santa Barbara*, vol. 1, pp. 1–25, 2008.

[20] Wes McKinney, “Data Structures for Statistical Computing in Python,” in *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, Stéfan van der Walt Jarrod Millman, Eds., 2010, pp. 56 – 61.

[21] T. pandas development team, “pandas-dev/pandas: Pandas,” Feb. 2020.

[22] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt *et al.*, “Array programming with NumPy,” *Nature*, vol. 585, no. 7825, pp. 357–362, Sep. 2020.

[23] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant *et al.*, “SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python,” *Nature Methods*, vol. 17, pp. 261–272, 2020.

[24] M. Hirsch, “Pymap3d: 3-d coordinate conversions for terrestrial and geospace environments,” *Journal of Open Source Software*, vol. 3, p. 580, 03 2018.

[25] D. C. Montgomery, E. A. Peck, G. G. Vining, *Introduction to Linear Regression Analysis*, 5th ed., ser. Wiley Series in Probability and Statistics. Hoboken, NJ: Wiley-Blackwell, Mar. 2012.