

Avaliação de Modelos Empíricos para a Taxa de Regressão de Combustível à Base de Parafina em Motor Foguete Híbrido com Injeção Axial e Swirl de GOx

Beatriz Luberiaga Bezerra, Argemiro Soares da Silva Sobrinho e Pedro Teixeira Lacava
Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), São José dos Campos/SP – Brasil

Resumo—A lei de potência clássica é o modelo semi-empírico dominante para a taxa de regressão de combustível em foguetes híbridos. Este trabalho ajusta e compara quatro modelos univariados — lei de potência, linear, logarítmico e raiz quadrada — e dois modelos multivariados que incorporam o tempo de queima e a razão oxidante/combustível medidos por ensaio, utilizando dados experimentais de um motor híbrido de escala laboratorial com combustível à base de parafina e injeção de oxigênio gasoso (*gaseous oxidizer* - GOx). Os ajustes são realizados por mínimos quadrados não-lineares para dois conjuntos de dados: injeção axial e injeção *swirl* com o injetor S18. O desempenho dos modelos é avaliado pelos critérios R^2 e RMSE. Discutem-se a fundamentação física de cada formulação, as limitações do conjunto de dados disponível e as implicações para a modelagem de motores com injeção *swirl*.

Palavras-Chave—foguete híbrido, taxa de regressão, injeção *swirl*.

I. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento de tecnologia aeroespacial em solo nacional é fundamental para a Defesa Nacional e para a manutenção da soberania do país, a qual deve-se estruturar a partir da cooperação entre a academia, a indústria e as Forças Armadas. No atual cenário geopolítico, marcado pela desglobalização [1] e por conflitos de alta intensidade, como a guerra entre Rússia e Ucrânia e entre Irã e EUA e Israel, os mísseis e os foguetes emergem como ativos de dissuasão obrigatórios e críticos. Um dos sistemas mais críticos desses armamentos é o de propulsão, o qual apresenta uma ampla variedade de configurações de projeto [2], [3]. Embora os motores a propelente sólido convencional já sejam consolidados na Base Industrial de Defesa (BID) brasileira, a busca por maior segurança operacional e flexibilidade tática tem impulsionado o interesse por tecnologias alternativas.

Diante desse panorama, os motores de foguete híbridos se sobressaem como uma alternativa inovadora e promissora para futuros sistemas táticos e aeroespaciais. Esses motores eliminam o risco de explosão acidental no manuseio logístico e no armazenamento pelo fato de, na configuração inicial, o combustível sólido inerte estar fisicamente separado do oxidante líquido ou gasoso [4]. Além disso, a possibilidade de controlar o fluxo do oxidante confere ao sistema características desejáveis em mísseis guiados (como a capacidade de modulação de empuxo, e extinção e reativação programadas da queima), nas quais o sistema de controle pode

comandar variações de empuxo para ajustar a trajetória em direção ao alvo [5].

O parâmetro fundamental para o projeto, dimensionamento balístico e otimização de um motor híbrido é a taxa de regressão linear do combustível sólido ($\dot{r}$) [5], [6]. Este parâmetro define a velocidade com que a superfície do grão é consumida de forma perpendicular ao escoamento gasoso [7]. A precisão na determinação de $\dot{r}$ é crítica: é a partir dela que se calculam o fluxo mássico de combustível injetado na câmara, a evolução temporal da razão oxidante/combustível (O/F) e, por consequência, a eficiência de combustão, o empuxo e a pressão de operação do motor [5].

A modelagem matemática deste fenômeno é objeto de investigação sistemática desde a década de 1960. Nos trabalhos de Marxman *et al.* [6], [7], estabeleceu-se o modelo semi-empírico clássico que relaciona a taxa de regressão ao fluxo de massa do oxidante (G_{ox}) por meio de uma lei de potência, fundamentado na teoria de transferência de calor em camada-limite turbulenta.

Contudo, com o avanço das pesquisas e a introdução de novas arquiteturas de motores, as limitações da lei de potência estritamente convectiva tornaram-se evidentes. Modificações na termofluidodinâmica do escoamento — causadas pela introdução de geometrias complexas, combustíveis liquefáveis (como a parafina) que sofrem carregamento mecânico de gotículas [8], e mecanismos de injeção rotacional (*swirl*) [9], [10] — alteraram significativamente o perfil de velocidade local e os balanços de energia radiante e convectiva na interface sólido-gás. Esse cenário motivou a necessidade de formulações matemáticas alternativas capazes de capturar tais efeitos físicos [11].

Dentre as abordagens propostas na literatura, destacam-se quatro formulações univariadas em G_{ox} e dois modelos multivariados avaliados neste trabalho. Este artigo visa comparar a aderência estatística e a fundamentação física dessas seis formulações, utilizando os dados experimentais obtidos na dissertação de mestrado de Quadros [4], desenvolvida no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

II. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A. Lei de Potência e o Modelo de Marxman

O modelo semi-empírico de Marxman e Gilbert estabelece que a taxa de regressão de combustível em motores foguete híbridos é governada pela transferência de calor convectiva

na camada-limite turbulenta sobre a superfície do grão, resultando na lei de potência [6]:

$$\dot{r} = a \cdot G_{ox}^n \quad (1)$$

em que $\dot{r}$ é a taxa de regressão do combustível, G_{ox} é o fluxo mássico do oxidante, e a e n são parâmetros determinados empiricamente para cada combinação de combustível, oxidante e geometria de motor [6].

O modelo pressupõe que o processo é inteiramente governado pela difusão térmica da chama para a superfície do combustível, sob convecção forçada pelo escoamento do oxidante, e prevê $n \approx 0,8$ para a taxa de regressão local. Para a taxa de regressão média ao longo do comprimento do grão — grandeza efetivamente medida nos ensaios —, o expoente efetivo é menor.

Ademais, este modelo foi originalmente desenvolvido e validado com polimetilmetacrilato (PMMA) como combustível [6], [7] e, ao longo dos estudos subsequentes, demonstrou boa aderência a outros combustíveis poliméricos convencionais, como polietileno (PE) e polibutadieno com terminação hidroxila (PBLH), para os quais a lei de potência reproduz satisfatoriamente os dados experimentais [5], [10]. Contudo, combustíveis liquefatíveis como a parafina introduzem um mecanismo adicional de transferência de massa — o arrastamento de gotículas do fundido pelo escoamento do oxidante — que não está contemplado na formulação de Marxman, o que pode tornar a lei de potência insuficiente para descrever adequadamente a taxa de regressão nesses sistemas [8].

Adicionalmente, o modelo foi derivado para escoamento predominantemente axial na câmara de combustão, sem componente tangencial de velocidade. A introdução de injeção *swirl* altera significativamente o perfil de velocidade local e os mecanismos de transferência de calor na superfície do grão [9], [10], configurando um segundo fator de afastamento das condições originais de validação do modelo.

B. Combustíveis Liquefatíveis e Parafina

A parafina representa um caso particular entre os combustíveis sólidos para propulsão híbrida. Ao contrário dos combustíveis poliméricos convencionais, que se decompõem termicamente por pirólise sem formar fase líquida estável [8], a parafina possui ponto de fusão consideravelmente inferior ao ponto de degradação desses materiais e, ao ser aquecida durante a queima, forma uma camada de *melt* (fundido) na superfície do grão. Quando essa fase líquida é submetida ao escoamento do oxidante, gotículas são carregadas para a chama, adicionando uma contribuição de transporte de massa à taxa de regressão que não está presente em combustíveis que regridem exclusivamente por pirólise. Este mecanismo foi identificado por Karabeyoglu *et al.* como o principal responsável pelas taxas de regressão serem até três vezes superiores em relação às de combustíveis poliméricos convencionais [8], o que justifica a investigação de formulações empíricas alternativas mesmo para a configuração de injeção axial.

C. Injeção Swirl

A baixa taxa de regressão dos combustíveis sólidos convencionais representa uma das principais limitações para a adoção em larga escala dos motores foguete híbridos, uma vez que ela

limita o fluxo mássico de combustível e, por consequência, o nível de empuxo gerado [5]. Para contornar essa restrição, a injeção tangencial de oxidante — denominada injeção *swirl* ou injeção em vórtice — surgiu como uma das técnicas de maior eficácia documentada na literatura [9], [12], [13].

O mecanismo físico fundamental da injeção *swirl* consiste em introduzir uma componente tangencial de velocidade ao escoamento do oxidante, que passa a descrever uma trajetória helicoidal no interior da câmara de combustão, ao longo da superfície do grão. Essa rotação produz dois efeitos acoplados sobre a taxa de regressão: aumento do coeficiente de transferência de calor convectivo na superfície do combustível e aumento da taxa de arrastamento de gotículas em combustíveis liquefatíveis, como a parafina. O primeiro efeito é proveniente do aumento da velocidade local e da tensão de cisalhamento na camada-limite, e o segundo decorre da força centrífuga e do cisalhamento tangencial [8]. A superposição desses mecanismos torna a dependência funcional de $\dot{r}$ com G_{ox} mais complexa do que em sistemas com combustíveis não-liquefatíveis, o que motiva diretamente a avaliação de modelos multivariados.

Os primeiros estudos sobre a injeção *swirl* em motores híbridos foram conduzidos por Yuasa *et al.*, que desenvolveram o motor de tipo *Swirling-Oxidizer-Flow-Type* (SOFT) com polimetilmetacrilato (PMMA) e oxigênio gasoso (*gaseous oxidizer* - GOx). Os experimentos demonstraram que a taxa de regressão com injeção *swirl* pode ser até 2,7 vezes superior em comparação à obtida com injeção axial nas mesmas condições de fluxo mássico do oxidante. Além disso, foi comprovado haver forte dependência da taxa de regressão com o número de *swirl* geométrico Sw do injetor. Este número quantifica a intensidade da rotação do escoamento em relação à sua componente axial e é calculado a partir da geometria do injetor. Adicionalmente, foi documentado nesse trabalho que a intensidade do escoamento rotacional decai ao longo da direção axial da câmara de combustão, de modo que o ganho de taxa de regressão é mais pronunciado na região próxima à entrada da câmara, onde está o grão, e se atenua progressivamente em direção à saída [9], [14].

O modelo semi-empírico clássico de Marxman *et al.* [6], fundamentado na teoria de transferência de calor em camada-limite turbulenta, estabelece a lei de potência $\dot{r} = a \cdot G_{ox}^n$ como expressão dominante para a taxa de regressão. Para parafina e GOx, o expoente n reportado na literatura situa-se tipicamente entre 0,5 e 0,7 [8], [15]. Carmicino e Russo Sorge [10] realizaram um estudo comparativo sistemático entre injeção axial e *swirl* para motores com polietileno (PE) e GOx, demonstrando que o mecanismo de injeção exerce influência significativa não apenas na magnitude de $\dot{r}$, mas também no próprio expoente n . Esse estudo obteve $n = 0,371$ para injeção axial e $n = 0,5$ para injeção *swirl*, evidenciando que a mudança no regime de escoamento altera a dependência de $\dot{r}$ com G_{ox} .

Tamura *et al.* [9] propuseram uma formulação empírica que estende a lei de potência para incorporar explicitamente Sw como variável independente adicional, na forma $\dot{r} = a \cdot G_{ox}^n \cdot Sw^m$. Essa formulação captura a amplificação da taxa de regressão pelo escoamento rotacional, mas requer variação experimental de Sw para o ajuste dos parâmetros, o que limita sua aplicabilidade aos conjuntos de dados com múltiplas configurações de injetor.

No contexto específico do motor em escala laboratorial com parafina e GOx objeto do trabalho de Quadros, a injeção *swirl* com o injetor S18 produziu taxas de regressão em média 2,4 vezes superiores às da injeção axial na mesma faixa de G_{ox} [4], o que está em acordo com os resultados de Yuasa *et al.* [14]. No estudo, também observou-se que a dispersão dos dados de $\dot{r}$ em função de G_{ox} é consideravelmente maior para a injeção *swirl* do que para a axial. Este é um indício de que variáveis adicionais — em particular o tempo de queima t_b , relacionado ao decaimento temporal do escoamento rotacional, e a razão O/F medida — exercem influência comparável à do fluxo mássico do oxidante [4].

III. DADOS EXPERIMENTAIS

A. Fonte e Configuração do Motor

O motor utilizado por Quadros [4] é de concepção modular: câmara de combustão de alumínio com comprimento de pré-câmara e tipo de injetor intercambiáveis, grão de parafina (Parafina 150, com negro de fumo e grafite como aditivos absorvedores de radiação), bico convergente-divergente fixo e cinco configurações de injetor: axial (A), radial (R), *swirl* S06, S18 e S31 — com número de *swirl* geométrico crescente. O oxidante é oxigênio gasoso (GOx). O grão possui comprimento nominal de ~ 107 mm e a câmara foi instrumentada com células de carga (empuxo), transdutores de pressão e medidor de fluxo mássico.

B. Critério de Seleção dos Dados

Dos 26 disparos catalogados na Tabela 6.1 de [4], foram selecionados para o ajuste dos modelos apenas os ensaios que satisfazem simultaneamente os seguintes critérios: (a) geometria padrão de câmara, com pré-câmara longa e grão de comprimento de projeto (~ 107 mm), excluindo configurações de pré-câmara curta e grão de comprimento reduzido, cujas diferenças geométricas alteram o valor médio de $\dot{r}$ calculado ao longo da queima; e (b) pertencimento ao injetor analisado, sem mistura de configurações distintas no mesmo conjunto de ajuste. Os injetores R e S31 possuem apenas 1 e 2 pontos cada, respectivamente, e, por isso, foram omitidos da análise. Esses critérios foram definidos *a priori*, com base exclusivamente em parâmetros geométricos da câmara, sem considerar os resultados dos ajustes.

Após a seleção dos dados, o conjunto final compreende 7 disparos axiais e 10 disparos S18, listados na Tabela I.

Nos dados obtidos com injeção axial, os experimentos #49 e #50 se sobressaem pelos valores notoriamente mais altos para os tempos de queima (8,96 s e 11,15 s, respectivamente). No conjunto S18, o ensaio #38 ($t_b = 0,54$ s) destaca-se pela duração consideravelmente inferior à dos demais disparos S18 e pela maior taxa de regressão registrada no conjunto (6,41 mm/s). Como não houve indicação de anomalia no procedimento de disparo por Quadros [4], os três ensaios foram mantidos.

IV. MODELOS EMPÍRICOS AVALIADOS

A. Modelos Univariados (M1–M4)

Quatro modelos univariados em G_{ox} — isto é, que expressam $\dot{r}$ como função de uma única variável independente — foram selecionados com base na literatura de propulsão

TABELA I
RESULTADOS SELECIONADOS PARA ANÁLISE (DADOS DE QUADROS [4]). INJETORES: A = AXIAL, S18 = SWIRL COM $Sw = 18$.

Ens.	Inj.	t_b [s]	O/F	$\dot{r}$ [mm/s]	G_{ox} [kg/(m ² ·s)]
#17	A	3,21	1,25	1,71	29,1
#28	A	3,66	1,37	2,40	40,7
#32	A	3,64	1,28	1,11	20,7
#49	A	8,96	1,52	1,47	20,4
#50	A	11,15	1,24	1,38	18,1
#46	A	3,63	1,49	1,87	29,7
#47	A	3,55	1,34	1,58	29,7
#16	S18	3,69	0,67	3,53	21,8
#23	S18	3,65	0,52	4,02	18,2
#31	S18	3,70	0,52	3,01	15,2
#27	S18	2,32	0,62	5,91	32,7
#38	S18	0,54	0,35	6,41	31,4
#36	S18	1,43	0,51	5,02	29,9
#48	S18	4,83	0,55	3,60	18,8
#34	S18	2,70	1,09	5,74	19,5
#40	S18	3,74	0,60	4,35	18,9
#43	S18	3,71	0,62	4,00	21,8

híbrida e aplicados tanto ao conjunto de dados axial quanto ao S18. Todos possuem dois parâmetros livres (a , n ou a , b) ajustados por mínimos quadrados não-lineares.

1) *Lei de Potência (M1)*: O modelo clássico de Marxman–Karabeyoglu:

$$\dot{r} = a \cdot G_{ox}^n \quad (2)$$

Para a taxa de regressão média ao longo do comprimento do grão, n efetivo situa-se entre 0,5 e 0,7 para parafina/GOx [8], [15].

2) *Modelo Linear (M2)*:

$$\dot{r} = a \cdot G_{ox} + b \quad (3)$$

O modelo linear é rigorosamente válido na condição de baixo fluxo mássico do oxidante ou de alto calor de vaporização do combustível [6]. Embora o motor em estudo não se enquadre nesse cenário — o calor latente de vaporização da parafina é baixo [16] e a faixa de G_{ox} não caracteriza o regime de baixo fluxo [4] —, a faixa de dados disponíveis para este trabalho é estreita, de modo que a relação entre $\dot{r}$ e G_{ox} pode apresentar comportamento local aproximadamente linear, o que torna a avaliação deste modelo pertinente.

3) *Modelo Logarítmico (M3)*:

$$\dot{r} = a \cdot \ln(G_{ox}) + b \quad (4)$$

O modelo logarítmico implica que $\dot{r}$ cresce de forma progressivamente mais lenta com G_{ox} , comportamento consistente com o regime de alta massa acrescentada, no qual o vapor de combustível gerado bloqueia parcialmente a transferência de calor convectiva para a superfície do grão [6]. No motor em estudo, a parafina possui calor latente de vaporização baixo [16], o que favorece uma taxa de vaporização elevada e, consequentemente, um regime de maior massa acrescentada.

4) *Modelo de Raiz Quadrada (M4)*:

$$\dot{r} = a \cdot \sqrt{G_{ox}} + b \quad (5)$$

Modelo que representa o caso particular $n = 0,5$ (expoente neutro) da lei de potência com deslocamento vertical (expresso pelo parâmetro b) [17].

B. Modelos Multivariados (M5–M6)

A disponibilidade de variáveis adicionais — tempo de queima (t_b) e razão entre oxidante e combustível (O/F) medida por ensaio — para ambas as configurações motivou a avaliação de dois modelos multivariados (M5 e M6), aplicados tanto aos dados axiais quanto ao conjunto S18.

As variáveis de entrada para M5 são G_{ox} e t_b , e para M6 são G_{ox} e O/F .

1) Lei de Potência com Tempo de Queima (M5):

$$\dot{r} = a \cdot G_{ox}^m \cdot t_b^n \quad (6)$$

Em que t_b é o tempo de queima e (a, n, m) são parâmetros livres ajustados por mínimos quadrados não-lineares.

Para a injeção *swirl*, espera-se $m < 0$, refletindo a redução de $\dot{r}$ com o aumento de t_b para um mesmo G_{ox} , em decorrência do decaimento axial da intensidade do escoamento rotacional [9], [14]. Para a injeção axial, em que o *swirl* está ausente, o sinal de m é determinado empiricamente.

2) Fluxo Total com O/F Medido por Ensaio (M6):

$$\dot{r} = a \cdot G_{tot}^m \quad (7)$$

tal que:

$$G_{tot,i} = G_{ox,i} \cdot \left(1 + \frac{1}{OF_i}\right) \quad (8)$$

onde OF_i é a razão mássica entre oxidante e combustível medida individualmente em cada ensaio, $G_{tot,i}$ é o fluxo total de massa e a, n são parâmetros livres ajustáveis. A Equação (8) origina da definição de O/F aplicada na relação $\dot{m}_{tot} = \dot{m}_{ox} + \dot{m}_f = \dot{m}_{ox}(1 + 1/O/F)$, sendo obtida ao dividir essa expressão pela área da seção reta do canal interno.

Este modelo é motivado pelo argumento de que o fluxo total de massa é o parâmetro fluidodinâmico relevante para a transferência de calor convectiva [6], [11]. A maioria dos experimentos feitos por Quadros com injeção *swirl* opera em O/F baixo (Tabela I), sugerindo que o fluxo mássico de combustível vaporizado seja comparável ao do oxidante, a condição em que a substituição de G_{ox} por G_{tot} é fisicamente justificada [6].

V. METODOLOGIA DE AJUSTE E AVALIAÇÃO

Os ajustes foram realizados em Python pelo algoritmo de Levenberg–Marquardt com mínimos quadrados não-lineares. Para M5 e M6, a função de ajuste recebe a matriz $X = [G_{ox}; t_b]$ e $X = [G_{ox}; O/F]$ respectivamente como argumento único, conforme exigido pela interface da função `curve_fit`.

Para cada modelo e cada conjunto de dados (axial e S18), foram calculados o coeficiente de determinação R^2 e a raiz do erro quadrático médio (RMSE), definidos pelas expressões usuais com N pontos amostrais ($N_{axial} = 7$, $N_{S18} = 10$):

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\dot{r}_i - \hat{r}_i)^2}{\sum_{i=1}^N (\dot{r}_i - \bar{r})^2}, \quad RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\dot{r}_i - \hat{r}_i)^2}{N}} \quad (9)$$

em que $\hat{r}_i$ é o valor predito pelo modelo e $\bar{r}$ é a média das taxas de regressão experimentais do respectivo conjunto.

Os resíduos $(\dot{r} - \hat{r})$ foram analisados numericamente para detectar padrões sistemáticos não captados pelos indicadores globais e os resultados são discutidos na Seção VI-D.

VI. RESULTADOS

A. Visão Geral dos Dados

A Fig. 1 apresenta a nuvem de pontos completa dos dados experimentais selecionados, com as curvas de potência ajustadas para os injetores axial e S18 ($\dot{r} = 0,117 \cdot G_{ox}^{0,62}$). A injeção S18 eleva $\dot{r}$ em média 2,4 vezes em relação à configuração axial na mesma faixa de G_{ox} , em acordo com a literatura [4], [9], [12], [14].

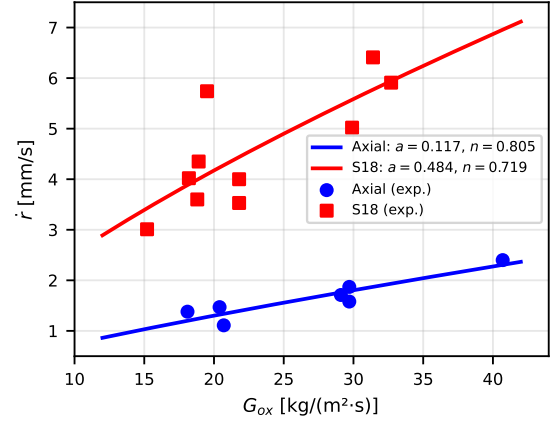


Fig. 1. Taxa de regressão versus fluxo de massa do oxidante para os injetores axial e S18, com lei de potência ajustada para cada configuração.

B. Ajuste dos Modelos — Injeção Axial

A Tabela II apresenta os parâmetros ajustados e os critérios estatísticos para os modelos aplicados aos 7 disparos axiais, incluindo M5, e a Fig. 2 exibe as curvas dos modelos sobrepostas aos dados.

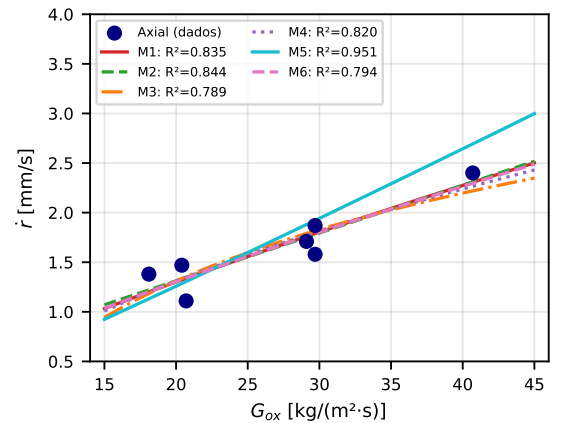


Fig. 2. Curvas ajustadas dos seis modelos sobrepostas aos dados do injetor axial ($N = 7$).

Para os modelos univariados M1–M4, os valores de R^2 situam-se entre 0,789 e 0,844, com o modelo linear (M2) apresentando o melhor desempenho ($R^2 = 0,844$, $RMSE = 0,150$ mm/s), seguido pela lei de potência (M1) e pelo modelo de raiz quadrada (M4). O expoente ajustado $n = 0,806$ de M1 encontra-se ligeiramente acima da faixa tipicamente reportada na literatura para parafina/GOx (0,62–0,72) [4], [8], [15], o que pode ser atribuído ao tamanho reduzido do conjunto ($N = 7$) e à presença dos ensaios #49 e #50, cujas

TABELA II
AJUSTE DOS MODELOS PARA O CONJUNTO AXIAL ($N = 7$).

Modelo	Parâmetros ajustados	R^2	RMSE [mm/s]
M1	$a = 0,1165$; $n = 0,8055$	0,835	0,155
M2	$a = 0,0482$; $b = 0,3480$	0,844	0,150
M3	$a = 1,278$; $b = -2,517$	0,789	0,175
M4	$a = 0,5013$; $b = -0,9319$	0,820	0,162
M5	$a = 0,0324$; $n = 1,0710$; $m = 0,2673$	0,951	0,084
M6	$a = 0,0770$; $n = 0,7973$	0,794	0,173

durações prolongadas ($t_b = 8,96$ s e $t_b = 11,15$ s) introduzem variabilidade não explicada por G_{ox} isolado.

No conjunto axial, o modelo M5 aumenta o R^2 para 0,951 e reduz o RMSE para 0,084 mm/s, revelando ser o modelo mais adequado para este conjunto de dados. Além disso, o expoente $m = +0,267 > 0$ (sinal oposto ao esperado para a injeção *swirl*) sugere dois aspectos importantes: que $\dot{r}$ aumenta com t_b para um mesmo G_{ox} , ou, para um mesmo $\dot{r}$, que G_{ox} diminui com o aumento de t_b . Como os ensaios #49 e #50 apresentam $\dot{r}$ próximos aos demais e tempos de queima evidentemente maiores, pode-se inferir que apresentam G_{ox} baixo, devido ao alargamento progressivo do canal interno do grão. Por conta dessa correlação negativa entre G_{ox} e t_b ($r = -0,67$), o modelo M1 subestimou $\dot{r}$ nesses ensaios, atribuindo ao baixo G_{ox} um desvio que é parcialmente explicado pela duração da queima.

C. Ajuste dos Modelos — Injeção Swirl S18

A Tabela III apresenta os resultados para os 10 disparos com o injetor S18, incluindo os modelos M5 e M6, e a Fig. 3 exhibe as curvas dos modelos sobrepostas aos dados.

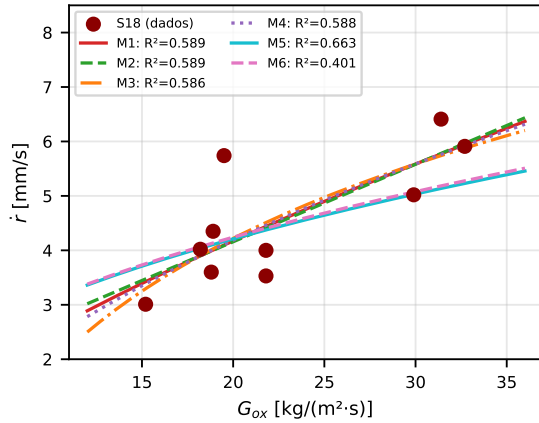


Fig. 3. Curvas ajustadas dos seis modelos sobrepostas aos dados do injetor S18 ($N = 10$).

TABELA III
AJUSTE DOS MODELOS PARA O INJETOR S18 ($N = 10$).

Modelo	Parâmetros ajustados	R^2	RMSE [mm/s]
M1	$a = 0,4835$; $n = 0,7195$	0,589	0,699
M2	$a = 0,1423$; $b = 1,311$	0,589	0,699
M3	$a = 3,370$; $b = -5,876$	0,586	0,702
M4	$a = 1,394$; $b = -2,045$	0,588	0,700
M5	$a = 1,303$; $n = 0,441$; $m = -0,133$	0,663	0,633
M6	$a = 0,7252$; $n = 0,4447$	0,401	0,844

Os modelos univariados M1–M4 mostram-se praticamente indistinguíveis entre si, pois os valores de R^2 ficam restritos entre 0,586 e 0,589. Além disso, esses modelos obtiveram RMSE de aproximadamente 0,70 mm/s, equivalente a 17% da taxa de regressão média do conjunto S18 ($\sim 4,0$ mm/s). A equivalência entre formulações funcionalmente distintas ($\Delta R^2 < 0,003$) demonstra que a escolha da forma funcional é irrelevante enquanto G_{ox} for a única variável independente, e confirma que G_{ox} sozinho é insuficiente para descrever a variabilidade dos dados de injeção *swirl* [9], [10].

O modelo M5 ($\dot{r} = 1,303 \cdot G_{ox}^{0,441} \cdot t_b^{-0,133}$) aumenta o R^2 para 0,663 e reduz o RMSE para 0,633 mm/s. O expoente $m = -0,133 < 0$ confirma a hipótese física apresentada na Seção IV: a taxa de regressão decresce com o aumento do tempo de queima para um mesmo G_{ox} , em acordo com o mecanismo de decaimento axial do *swirl* [9], [14]. Ademais, o sinal de m é oposto ao obtido para o conjunto axial, o que evidencia que t_b captura mecanismos fisicamente distintos nas duas configurações. A inclusão de t_b também redistribui a variância explicada: o expoente n cai de aproximadamente 0,720 (M1) para 0,441 (M5), indicando que parte da dependência aparente com G_{ox} em M1 reflete a correlação entre G_{ox} e t_b no conjunto S18.

O modelo M6 apresentou o pior desempenho de todos, inferior inclusive aos univariados. Uma provável causa é que G_{ox} e O/F medido variam de forma não-monotônica nos ensaios S18, como evidenciado na Tabela I, na qual os ensaios com O/F discrepantes (#34 com $O/F = 1,09$ e #38 com $O/F = 0,35$) apresentam taxas de regressão próximas. Dessa forma, o modelo provocou ruído adicional em vez de reduzir a dispersão.

D. Análise de Resíduos

Para a injeção axial, os resíduos dos modelos univariados (M1–M4) concentram desvios negativos nos ensaios #49 e #50 (subestimação de $\dot{r}$), confirmando o desvio sistemático associado à duração prolongada (Fig. 4). O modelo M5 atenua esse padrão de forma expressiva, consistente com o ganho substancial de R^2 .

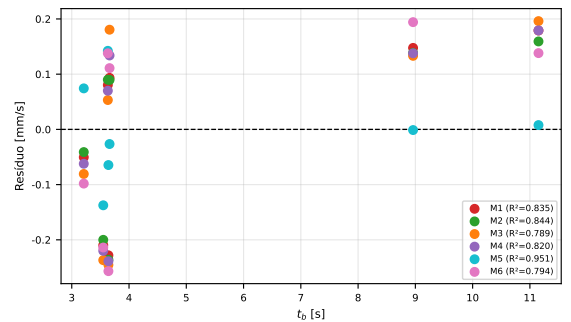


Fig. 4. Resíduos dos modelos em função do tempo de queima t_b para o injetor axial.

Para a injeção S18, os resíduos dos modelos univariados apresentam tendência monotônica com t_b : resíduos positivos nos ensaios de curta duração (#38, $t_b = 0,54$ s; #36, $t_b = 1,43$ s) e negativos nos de longa duração (#48, $t_b = 4,83$ s), conforme evidenciado na Fig. 5. Esse padrão é consistente com o mecanismo de decaimento axial do *swirl*: ensaios mais

curtos operam com canal interno de menor diâmetro e maior intensidade de *swirl* média, resultando em $\dot{r}$ sistematicamente superior. O modelo M5 atenua esse padrão sem eliminá-lo completamente, em acordo com seu ganho moderado de R^2 .

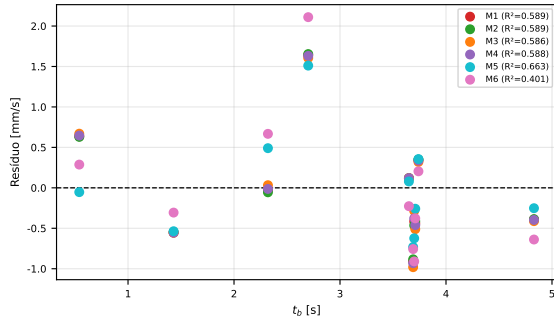


Fig. 5. Resíduos dos modelos em função do tempo de queima t_b para o injetor S18.

VII. DISCUSSÃO

A. Comparação Estatística entre Modelos

Para o conjunto axial, o intervalo de R^2 entre os quatro modelos univariados é de 0,055 (de 0,789 a 0,844), indicando que a faixa de G_{ox} testada (18–41 kg/(m²·s)) é estreita demais para discriminar entre formulações funcionalmente distintas. O valor ajustado $n = 0,806$ em M1 está acima da faixa típica da literatura (0,62–0,72) [4], [8], [10], possivelmente em decorrência da influência não controlada de t_b nos ensaios #49 e #50 — hipótese confirmada pelo ajuste de M5, que absorve essa variabilidade e eleva o R^2 para 0,951.

Para o conjunto S18, o único ganho estatístico observado é o de M5 ($\Delta R^2 = 0,074$). A comparação entre os sinais de m nos dois conjuntos (positivo no axial, negativo no S18) é um resultado bastante expressivo do trabalho, pois ela demonstra que t_b não é simplesmente uma variável indireta de condições operacionais gerais, mas que captura mecanismos fisicamente distintos dependendo da configuração de injeção.

B. Limitações Físicas dos Modelos Univariados para Swirl

A baixa qualidade dos ajustes univariados para S18 ($R^2 \approx 0,59$) é consistente com os resultados de Carmicino e Russo Sorge [10], que demonstraram que a injeção rotacional altera a própria forma funcional da dependência de $\dot{r}$ com G_{ox} . Ao menos dois fatores não capturados contribuem para a dispersão observada:

(a) *Decaimento axial do swirl*: a intensidade do escoamento rotacional decai ao longo do canal interno do grão [9], [12], [14]. Ensaios de curta duração apresentam canal interno de menor diâmetro e maior intensidade de *swirl* local média, resultando em $\dot{r}$ sistematicamente superior àqueles de longa duração com o mesmo G_{ox} . O modelo M5 captura parcialmente esse efeito via t_b .

(b) *Razão O/F*: nos ensaios S18, a maioria dos valores de O/F estão abaixo de 1, ou seja, há maior quantidade de combustível do que de oxidante na combustão. Isso implica que a contribuição do fluxo de combustível ao fluxo de massa total seja significativa. Entretanto, o modelo M6 demonstrou que a incorporação direta do O/F medido piora o ajuste, sugerindo que a relação entre O/F e $\dot{r}$ não é monotônica neste conjunto.

VIII. CONCLUSÃO

Este trabalho comparou seis modelos empíricos para a taxa de regressão de um motor híbrido de escala laboratorial com parafina e GOx, com injeções axial e *swirl* (S18). A exclusão criteriosa de ensaios com geometria não-padrão, realizada previamente com base em parâmetros geométricos, é etapa essencial para a validade comparativa dos ajustes.

Para injeção axial, os modelos univariados apresentam desempenhos equivalentes entre si. O modelo M5 obteve maior adequação, confirmando que t_b é variável relevante mesmo na ausência de *swirl*. Para injeção S18, todos os modelos univariados produzem ajustes praticamente idênticos e insuficientes, confirmando que G_{ox} sozinho não descreve adequadamente a variabilidade dos dados. O modelo M5 revela que t_b captura mecanismos fisicamente distintos nas duas configurações: decaimento do *swirl* na injeção rotacional ($m < 0$) e variabilidade de G_{ox} médio por alargamento do canal interno do grão na injeção axial ($m > 0$). O modelo M6 apresentou desempenho inferior a todos os demais, indicando que G_{tot} não é o parâmetro mais adequado para descrever este conjunto de dados.

REFERÊNCIAS

- [1] R. Matthews, V. Vivoda e R. Leal, “Deglobalization and the rehabilitation of Western defense industrial sovereignty,” *Comparative Strategy*, vol. 45, n. 2, pp. 87–113, 2026.
- [2] T. Karako, “The enduring role of fires on the modern battlefield,” *CSIS*, Washington, DC, pp. 114–129, 2024.
- [3] UNODA, “Missiles in conflict,” *UNODA Study Series*, New York, n. 34, pp. 12–28, 2023.
- [4] F. D. A. Quadros, “Swirl Injection of Gaseous Oxygen in a Lab-Scale Paraffin Hybrid Rocket Motor,” Dissertação de Mestrado, ITA, São José dos Campos, 2017.
- [5] G. P. Sutton e O. Biblarz, *Rocket Propulsion Elements*, 9. ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2016.
- [6] G. A. Marxman e M. Gilbert, “Turbulent boundary layer combustion in the hybrid rocket,” *Proc. Combust. Inst.*, vol. 9, pp. 371–383, 1963.
- [7] G. A. Marxman, C. E. Wooldridge e R. J. Muzzy, “Fundamentals of hybrid boundary layer combustion,” *Heterogeneous Combustion Conf.*, AIAA, 1963.
- [8] M. A. Karabeyoglu *et al.*, “Scale-up tests of high regression rate paraffin-based hybrid rocket fuels,” *J. Propul. Power*, vol. 20, n. 6, pp. 1037–1045, 2004.
- [9] H. Tamura *et al.*, “Regression-rate augmentation of hybrid rocket motor using swirl injection,” *AIAA Paper 2009-5089*, 45th JPC, Denver, CO, 2009.
- [10] C. Carmicino e A. Russo Sorge, “Role of injection in hybrid rockets regression rate behavior,” *J. Propul. Power*, vol. 21, n. 4, pp. 606–612, 2005.
- [11] G. Ziliac e M. A. Karabeyoglu, “Hybrid rocket fuel regression rate data and modeling,” *AIAA Paper 2006-4504*, 42nd JPC, Sacramento, CA, 2006.
- [12] C. Lee *et al.*, “Effect of induced swirl flow on regression rate of hybrid rocket fuel by helical grain configuration,” *Aerosp. Sci. Technol.*, vol. 11, n. 1, pp. 68–76, 2007.
- [13] Y. Pal *et al.*, “Review on the regression rate-improvement techniques and mechanical performance of hybrid rocket fuels,” *FirePhysChem*, vol. 1, pp. 272–282, 2021.
- [14] S. Yuasa *et al.*, “Development of a small sounding hybrid rocket with a swirling-oxidizer-type engine,” *AIAA Paper 2001-3537*, 37th JPC, Salt Lake City, UT, 2001.
- [15] M. A. Karabeyoglu, B. J. Cantwell e G. Ziliac, “Development of scalable space-time averaged regression rate expressions for hybrid rockets,” *J. Propul. Power*, vol. 23, n. 3, pp. 737–747, 2007.
- [16] Y. Wang, S.-q. Hu, X.-l. Liu, L.-l. Liu, Regression rate modeling of HTPB/paraffin fuels in hybrid rocket motor, *Aerospace Science and Technology* 121 (2022) 107324.
- [17] A. Karabeyoglu, E. Toson e B. Evans, “O/F shift in hybrid rockets,” *AIAA Paper 2014-3851*, 50th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Cleveland, OH, 2014.